Определители в комбинаторике (часть 1)

Задача 6.1. а) Выведите из леммы LGV о подсчете непересекающихся путей тождество $f_m f_{m+2} - f_{m+1}^2 = \pm 1$. б) Докажите также, что

$$\det \begin{pmatrix} f_m & f_{m+p} & f_{m+q} \\ f_{m+r} & f_{m+p+r} & f_{m+q+r} \\ f_{m+s} & f_{m+p+s} & f_{m+q+s} \end{pmatrix} = 0.$$

Задача 6.2. а) Чему равен определитель матрицы $a_{ij} = C_{i+j}$ ($1 \leqslant i, j \leqslant h$, C_k — k-е число Каталана)?

б*) Объясните комбинаторный смысл и вычислите определитель матрицы $a_{ij} = C_{n+i+j-2}$ ($1 \leqslant i, j \leqslant h$; ответ должен быть в духе формулы Макмагона).

$$\begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & \dots & C_{n+h-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h-1} & C_{n+h} & \dots & C_{n+2h-2} \end{pmatrix}$$

▷ Будем называть *треугольником Гельфанда–Цетлина* треугольную таблицу из целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего, но (строго) меньше правого верхнего соседа.

$$\begin{array}{ccccccccc} l_1 & & l_2 & & \dots & & l_{n-1} & & l_n \\ & l_{12} & & l_{23} & & \dots & & l_{n-1\,n} & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & l_{1\,n-1} & & l_{2n} & & & \\ & & & & l_{1n} & & & & \end{array}$$

Задача 6.3. а) Сведите задачу о нахождении количества треугольников Гельфанда–Цетлина *с данной первой строкой* к вычислению некоторого определителя.

б) Докажите, что их количество равно $\displaystyle\prod_{i>j} \frac{l_i - l_j}{i - j}$.

Треугольники Гельфанда–Цетлина с данной первой строкой нумеруют элементы базиса Гельфанда–Цетлина в данном неприводимом представлении gl_n. А последнее утверждение представляет собой формулу Вейля для размерности такого представления.

Задача 6.4. Постройте биекцию между треугольниками Гельфанда–Цетлина (с подходящей первой строкой) и диаграммами Юнга, помещающимися внутрь коробки $a \times b \times c$.

Задача 6.5. Будем говорить, что s — спуск перестановки σ, если $\sigma(s) > \sigma(s+1)$.

а) Докажите, что количество перестановок n элементов с набором спусков $\{s_1, \dots, s_k\}$ равно определителю матрицы $a_{ij} = \dbinom{n - s_i}{s_{j+1} - s_i}$, где $0 \leqslant i, j \leqslant k$, $s_0 := 0$, $s_{k+1} := n$.

б) Сформулируйте и докажите q-аналог последнего утверждения.