Числа Бернулли, змеи, дзета-функция

▷ Определение чисел Бернулли состоит в том, что $\sum B_m \dfrac{t^m}{m!} = \dfrac{t}{e^t-1} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{6} - \cdots$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Задача 5.1. Докажите, что $B_{2l+1} = 0$ при $l > 0$.

Задача 5.2. Найдите радиус сходимости ряда $\sum B_m \dfrac{t^m}{m!}$. Что это говорит про асимптотику чисел $|B_m|$ при $m \to \infty$?

Задача 5.3. Выразите коэффициенты разложения в ряд функции а) $t \operatorname{ctg} t$; б) $\operatorname{tg} t$ через числа Бернулли[1].

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

Задача 5.4. Докажите, что тангенс является экспоненциальной производящей функцией последовательности *целых* чисел. Что это говорит про знаменатель числа B_m?

▷ Следующая задача объясняет комбинаторный смысл этой последовательности целых чисел.

Задача 5.5. *Треугольник Эйлера–Бернулли* E_n^k задается рекуррентой $E_n^k = E_n^{k-1} + E_{n-1}^{n-k}$ и начальным условем $E_0^0 = 1$ ($E_n^k = 0$ при $k > n$, $k < 0$).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & & \\
 & 0 & & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16 & \\
0 & & 16 & & 32 & & 46 & & 56 & & 61 & & 61
\end{array}$$

а) Докажите, что $E_n := E_n^n = \sum_k E_{n-1}^{k-1}$ есть количество «змей длины n» — таких перестановок, что $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots \lesseqgtr \sigma(n)$, и объясните, какой характеристике змеи соответствует число k.

(Например, $E_3 = |\{132, 231\}| = 2$, $E_4 = |\{1324, 1423, 2314, 2413, 3412\}| = 5$.)

б) Докажите комбинаторно, что $\displaystyle\sum_i (-1)^i \binom{2l+1}{2i} E_{2l+1-2i} = (-1)^l$.

(Рассмотрите перестановки, т. ч. $\sigma(1) < \ldots < \sigma(2i)$ и $\sigma(2i+1) < \sigma(2i+2) > \ldots > \sigma(2l+1)$.)

в) Найдите экспоненциальную производящую функцию чисел E_{2l+1}.

г*) Найдите экспоненциальную производящую функцию чисел E_{2l}.

(продолжение на обороте)

[1]Для тех, кто совсем забыл школьную тригонометрию: $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg}(2x)$.

▷ Напомним (см. задачу 2.7), что в *треугольнике Эйлера* стоят числа $E(n,m)$ — количества перестановок n элементов с ровно m подъемами.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&4&&1&& \\ &1&&11&&11&&1& \\ 1&&26&&66&&26&&1 \end{array}$$

Задача 5.6*. Докажите комбинаторно, что знакопеременная сумма строки треугольника Эйлера равна E_{2l+1}. Выведите отсюда, что если понимать $\zeta(-m)$ "по Эйлеру", то
$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}.$$
(Ср. с $1^m + 2^m + \ldots + (N-1)^m = \dfrac{(B+N)^{m+1} - B_{m+1}}{m+1}$.)

▷ Числа Бернулли связаны и со значениями ζ-функции в целых положительных точках.

Задача 5.7. а) Многогранник в $\mathbb{R}^m$ задан неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant 1$. Найдите его объем.

б) Многогранник Π_{2l} задан в пространстве с координатами $\phi_1, \ldots, \phi_{2l}$ неравенствами $\phi_1 \geqslant 0, \ldots, \phi_{2l} \geqslant 0$, а также $\phi_1 + \phi_2 \leqslant \pi/2$, $\phi_2 + \phi_3 \leqslant \pi/2$, …, $\phi_{2l} + \phi_1 \leqslant \pi/2$. Выразите его объем через число змей подходящей длины.

Задача 5.8. а) Докажите, что
$$\mathrm{Vol}(\Pi_{2l}) = \int\limits_{[0,1]^{2l}} \frac{dx_1 \ldots dx_{2l}}{1 - x_1^2 x_2^2 \ldots x_{2l}^2} = 1 + \frac{1}{3^{2l}} + \frac{1}{5^{2l}} + \ldots$$
(указание: $x_1 = \sin\phi_1/\cos\phi_2$, $x_2 = \sin\phi_2/\cos\phi_3, \ldots$ — ср. с заменой $x = \sin\phi/\cos\phi$, вычисляющей интеграл функции $(1+x^2)^{-1}$).

б) Выведите из предыдущего пункта, что
$$\zeta(2l) = (-1)^{l+1}\frac{B_{2l}(2\pi)^{2l}}{2(2l)!}.$$

▷ Мы связали значения дзета-функции в точке $s = 2l$ и точке $s = 1 - 2l$ с одним и тем же комбинаторным объектом — змеями длины $2l+1$. Ср. с обнаруженным Эйлером и доказанным Риманом равенством
$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$