Числа Каталана и их родственники

▷ Число Каталана — это количество путей Дика из точки $(0,0)$ в точку (n,n).

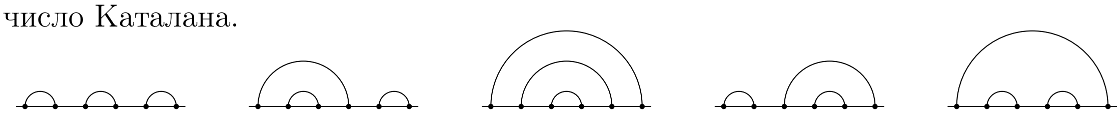
Задача 4.1. Пусть $c(n,m)$ — количество способов расставить числа от 1 до $n+m$ в клетках диаграммы Юнга из двух строк, длины n и m ($n \geqslant m$), так чтобы в каждой строке и каждом столбце числа возрастали.

а) Найдите рекурренту и явную формулу для чисел $c(n,m)$.

б) Докажите, что $c(n,n)$ есть n-е число Каталана.

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5 6	3 5 6	2 5 6	3 4 6	2 4 6

Задача 4.2. а) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами в верхней полуплоскости есть n-е число Каталана.



б) Найдите производящую функцию для способов соединить *некоторые* из n точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами в верхней полуплоскости.

Задача 4.3. Пусть $f(n,k)$ — количество наборов из $(n-1-k)$ непересекающихся диагоналей в выпуклом $(n+2)$-угольнике (в т. ч. $f(n,0)$ есть n-е число Каталана).

а) Найдите производящую функцию для $s_n := \sum_k f(n,k)$, количеств всех разбиений $(n+2)$-угольника на многоугольники непересекающимися диагоналями.

б) Придумайте комбинаторную интерпретацию для чисел s_n в терминах деревьев.

в) Докажите, что $\sum_k (-1)^k f(n,k) = 1$.

Задача 4.4*. Постройте выпуклый $(n-1)$-мерный многогранник («ассоциаэдр»), количество k-мерных граней в котором есть $f(n,k)$ (после этого предыдущее равенство мгновенно получается из формулы Эйлера!).

▷ Ассоциаэдр как комбинаторный объект возник в работах Сташефа по топологии. Разные реализации ассоциаэдра как выпуклого многогранника нашли Милнор, Хайман, Гельфанд, Зелевинский, Лодей и др.