Разбиения и q-бином

Задача 3.1. Вычислите бесконечное произведение

$$(1+q+q^2+\ldots+q^9)(1+q^{10}+q^{20}+\ldots+q^{90})(1+q^{100}+\ldots+q^{900})\ldots$$

Задача 3.2. а) Докажите при помощи производящих функций, что разбиений числа N на различные слагаемые столько же, сколько разбиений числа N на нечетные слагаемые. б*) Докажите то же комбинаторно.

Задача 3.3. а) Докажите, что $\prod\limits_n \frac{1}{(1-q^n)} = \sum\limits_r \frac{q^{r^2}}{[(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)]^2}$.

б) Вычислите $\sum\limits_r \frac{q^{r(r+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}$.

▷ Последние тождества нашел Эйлер. Заметно сложнее доказать похожие на них *тождества Роджерса–Рамануджана* для $\sum \frac{q^{r^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}$ и $\sum \frac{q^{r(r+1)}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}$.

* * *

▷ Напомним, что $[n] = 1+q^2+\ldots+q^{n-1}$, $[n]! = [n]\cdot[n-1]\cdot\ldots\cdot[1]$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\cdot[n-k]!}$.

Задача 3.4. а) $[n]!$ является (как многочлен от q) производящей функцией перестановок n элементов по числу беспорядков.

б) Пусть q — степень простого числа. Найдите (выразите через $[n]!$) $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$, количество обратимых матриц над полем из q элементов.

Задача 3.5. а) Если q — степень простого числа, то $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ есть $|Gr_{k,n}(\mathbb{F}_q)|$, количество k-мерных линейных подпространств в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}_q$.

б*) Если $q=-1$, то $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ есть $\chi(Gr_{k,n}(\mathbb{R}))$, эйлерова характеристика вещественного грассманиана k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве.

Задача 3.6. На лекции объяснялось, что

$$(1+x)(1+qx)\ldots(1+q^{n-1}x) = \sum q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Докажите другую версию q-бинома: если $YX = qXY$ (а q со всеми переменным коммутирует), то

$$(X+Y)^n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{n-k}Y^k.$$

Задача 3.7. а) Докажите, что $(x+y)^{\downarrow n} = \sum\limits_{k+l=n} \binom{n}{k} x^{\downarrow k} y^{\downarrow l}$ и $\binom{x+y}{n} = \sum\limits_{k+l=n} \binom{x}{k}\binom{y}{l}$.

б) Сформулируйте и докажите q-аналог последнего равенства.

Задача 3.8. Хорошо известно, что $\sum\limits_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. Найдите сумму $\sum\limits_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.