Рациональные функции и линейные рекурренты

Задача 2.1. Производящей функцией какой последовательности является ряд
а) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; б) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$; в) $\dfrac{1}{(1-x)^n}$?

Задача 2.2. Задайте последовательность $a_k = k^2$ линейной рекуррентой. Найдите ее производящую функцию.

▷ Напомним, что число Фибоначчи f_k — это количество способов разбить полоску $1 \times k$ на квадраты 1×1 и доминошки 1×2 (в частности, $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$).

Задача 2.3. а) Найдите производящую функцию $f(t) := \sum_k f_k t^k$.
б) Решите аналогичную задачу для количеств t_k разбиений на квадраты, доминошки и прямоугольники 1×3.

Задача 2.4. Докажите а) при помощи производящих функций; б) комбинаторно тождество для чисел Фибоначчи

$$f_0 + f_1 + \ldots + f_k = f_{k+2} - 1.$$

▷ Напомним, что *многочлены Чебышева* определяются условием $\cos k\varphi = T_k(\cos\varphi)$.

Задача 2.5. а) Найдите рекурренту, выражающую $T_{k+1}(x)$ через $T_k(x)$ и $T_{k-1}(x)$.
б) Найдите производящую функцию $T(x,t) := \sum_k T_k(x) t^k$.
в*) Какие веса надо придать разбиениям полоски $1 \times n$ на квадраты и доминошки, чтобы сумма весов по всем разбиениям давала n-й многочлен Чебышева?

Задача 2.6. Пусть $E(n,1)$ — количество перестановок n элементов с ровно одним *подъемом* (т.е. таких перестановок σ, что $\sigma(i+1) > \sigma(i)$ ровно для одного i). Например, $E(3,1) = |\{132, 213, 231, 312\}| = 4$.
а) Докажите, что $E(n+1,1) = 2E(n,1) + n$.
б) Найдите производящую функцию и явную формулу для чисел $E(n,1)$.

Задача 2.7*. а) Найдите рекурренту, получающую следующую строчку чисел $E(n,m)$ в «треугольнике Эйлера» из предыдущей.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&4&&1&& \\ &1&&11&&11&&1& \\ 1&&26&&66&&26&&1 \end{array}$$

б) Докажите, что $\displaystyle\sum_k (-1)^{k-1} k^n t^k = \frac{t \cdot E_n(-t)}{(1+t)^{n+1}}$, где $\displaystyle E_n(t) = \sum_m E(n,m) t^m$.

▷ Числа $E(n,m)$ ввел Эйлер, двигаясь в противоположном направлении: он заметил, что если модифицировать определение ζ-функции и положить $\eta(s) = \sum_k (-1)^{k-1} k^{-s}$, то при $s = -n$ можно *определить* значение расходящегося ряда $\eta(-n)$ как значение *рациональной* функции $\sum_k (-1)^{k-1} k^n t^k$ в точке $t = 1$. Вместе с (очевидным при $s > 1$) равенством $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s)$ это дает рецепт вычисления ζ-функции в целых отрицательных точках (мы вернемся к этому позже). Замечательным образом это дает тот же ответ, что и аналитическое продолжение.