

Треугольник Паскаля и треугольник Стирлинга

- ▷ *Треугольник Паскаля* — это треугольная таблица, в которой в верхней строке стоит 1, а дальше каждое число равно сумме двух стоящих над ним, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Задача 1.1. Чему равна знакопеременная сумма чисел в n -й строке треугольника Паскаля? Дайте комбинаторное доказательство.

Задача 1.2. Чему равна сумма чисел n -й строки с номерами, кратными 3? Приведется комбинаторное доказательство.

Задача 1.3. Чему равна знакопеременная сумма квадратов чисел в n -й строке треугольника Паскаля? (Может быть полезно начать с эксперимента.)

- ▷ *Треугольник Стирлинга* — это треугольная таблица, в которой в верхней строке стоит 1, а дальше каждое число получается из двух стоящих над ним по правилу $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 3 & 1 \\
 & & & 1 & 7 & 6 & 1 \\
 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1
 \end{array}$$

Задача 1.4. Найдите формулу для а) предпоследнего; б) второго числа в n -й строке.

Задача 1.5. Докажите, что количество сюръекций n элементного множества на k -элементное есть $k! \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Задача 1.6. Объясните комбинаторный смысл суммы B_n всех чисел в n -й строке треугольника Стирлинга и докажите, что $B_{n+1} = \sum \binom{n}{k} B_k$.

Задача 1.7. Докажите комбинаторно, что $x^n = \sum_{k \leq n} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\downarrow k}$.

Напомним, что m^n — это количество всех отображений из n -элементного множества в m -элементное, а $m^{\downarrow n}$ — количество инъективных отображений.

Задача 1.8. Докажите формулу для суммы степеней: $1^k + 2^k + \dots + n^k = \sum \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix} \right\} \frac{(n+1)^{\downarrow l+1}}{l+1}$.