НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Римановы многообразия-II. 5.05.2020.

Задача 1. Пусть M риманово многообразие, а ∇ — связность Леви-Чивиты. Определим гессиан гладкой функции по формуле

$$\mathrm{Hess} f = \nabla df.$$

Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\mathrm{Hess} f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные.

Задача 2. Пусть M подмногообразие риманова многообразия $\tilde{M}$, на котором мы рассматриваем индуцированную метрику. Пусть f — гладкая функция на $\tilde{M}$. Найдите соотношение, связывающее гессиан на M ограничения $f|_M$ с гессианом f на $\tilde{M}$ и другими геометрическими объектами.

Задача 3. Пусть g риманова метрика на многообразии M, а X — векторное поле. Выразить производную Ли $L_X g$ через ковариантные производные.

Задача 4. Векторное поле X на римановом многообразии называется полем Киллинга, если оно сохраняет метрику g, то есть если $L_X g = 0$. Выразите это условие через связность Леви-Чивиты.

Задача 5. Опишите киллинговы векторные поля на сфере со стандартной метрикой.

Задача 6. Риманово многообразие называется многообразием Эйнштейна, если тензор Риччи пропорционален метрике с постоянным коэффициентом пропорциональности, то есть если существует такая константа k, что

$$\mathrm{Ric} = kg.$$

Докажите, что сфера $\mathbb{S}^n$ единичного радиуса со стандартной метрикой является многообразием Эйнштейна. Чему для неё равна константа k? Чему равна константа k на произвольном многообразии Эйнштейна?

Задача 7. Доказать, что левоинвариантная метрика на $\mathrm{O}(n)$, порождённая скалярным произведением

$$\langle \xi, \eta \rangle_e = \mathrm{tr}\, \xi \eta^T \tag{1}$$

на $\mathfrak{so}(n)$, является биинвариантной.

Задача 8. Построить биинвариантную метрику на группе Ли $\mathrm{U}(n)$.

Задача 9. Для биинвариантной метрики на $\mathrm{O}(3)$, порождённой скалярным произведением (1) в алгебре $\mathfrak{so}(3)$, найти секционную кривизну в точке E в направлении двумерной плоскости, порождённой векторами

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) = T_E O(3).$$

Задача 10*. Найдите объём группы $\mathrm{SO}(3)$ относительно биинвариантной метрики на $\mathrm{SO}(3)$, порождённой скалярным произведением (1). *Указание. Можно воспользоваться двулистным накрытием*

$$\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3).$$