**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.**
**Римановы многообразия-I. 21.04.2020.**

**Задача 1.** Пусть $Y, X_1, \ldots, X_k$ векторные поля, $\omega$ дифференциальная $k$-форма, $\nabla$ симметрическая связность, а $L_Y$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля $Y$. Доказать тождество

$$(L_Y\omega)(X_1, \ldots, X_k) = (\nabla_Y\omega)(X_1, \ldots, X_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, \nabla_{X_i}Y, \ldots, X_k).$$

**Задача 2.** Доказать, что геликоид $\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av)$ и катеноид $\mathbf{R}(u, v) = \left(\sqrt{a^2 + u^2} \cos v, \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, a \ln \dfrac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{a}\right)$ локально изометричны, но не изометричны.

**Задача 3.** Если $\nabla$ связность в касательном расслоении $TM$, то она продолжается до связностей во всех тензорных расслоениях $T^p_q M$. Для простоты будем обозначать эти продолжения связности $\nabla$ тем же символом $\nabla$. Риманова метрика $g = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$ является тензором типа $\binom{0}{2}$. Доказать, что связность $\nabla$ согласована с метрикой $g$ тогда и только тогда, когда она является ковариантно постоянным тензором, то есть когда $\nabla g = 0$.

**Задача 4.** Доказать, что для $n$-мерной сферы $\mathbb{S}^n_r \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса $r$ с индуцированной стандартной метрикой тензор Римана можно найти по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} \left(< Y, Z > X - < X, Z > Y\right),$$

а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \dfrac{1}{r^2}$.

**Задача 5.** Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R^1_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

**Задача 6.** Доказать, что тензор Риччи связности Леви-Чивита $\nabla$ является симметрическим, $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X)$.

**Задача 7.** Рассмотрим двумерную поверхность $M$ в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть $K$ гауссова кривизна $M$. Доказать, что в данном случае

- $\mathrm{Ric}(X, Y) = K\langle X, Y \rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

**Задача 8.** Доказать, что для симметричной связности $\nabla$ имеет место тождество Бианки

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0,$$

где $X$, $Y$, $Z$ и $V$ векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R^l_{ij,k} + \nabla_i R^l_{jm,k} + \nabla_j R^l_{mi,k} = 0.$$

**Задача 9.** Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое структурное уравнение Картана $de^i = e^j \wedge \Gamma^i_j + T^i$,
- второе структурное уравнение Картана
$$d\Gamma^j_i = \Gamma^k_i \wedge \Gamma^j_k + F^j_i,$$
- первое тождество Бианки
$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma^i_j + e^j \wedge F^i_j,$$
- второе тождество Бианки
$$dF^j_i = \Gamma^k_i \wedge F^j_k - F^k_i \wedge \Gamma^j_k,$$

где $e^i$ дуальный базис к выбранному базису $e_i$ в векторных полях, $\Gamma^i_j$ локальная 1-форма связности,

$$F^j_i = R^j_{kl,i} e^k \otimes e^l = \sum_{k<l} R^j_{kl,i} e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а $T^i$ локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T^k_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T^k_{ij} e^i \wedge e^j.$$

**Задача 10.** Пусть $e_i$ базис в векторных полях, $e^i$ дуальный к нему базис. Рассмотрим сечение $s$ расслоения $\xi = (E \longrightarrow M)$. Формулу $\nabla s = e^i \otimes \nabla_{e_i} s$, где $s \in \Gamma(M, E)$, для связности в расслоении $\xi$ по ошибке иногда пишут как $\nabla s = e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, но последняя формула неверна и *для произвольного расслоения $\xi$ не имеет смысла!*

Но есть случай, когда операция $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$ имеет смысл и тоже интересна. Пусть у нас есть симметричная связность $\nabla$ в $TM$. Распространим эту связность в расслоение внешних форм. Пусть $s \in \Omega(M)$ дифференциальная форма на $M$. Рассмотрим операцию $\nabla \wedge s := e^i \wedge \nabla_{e_i} s$, где мы смотрим на $s$ как на сечение расслоения $\Lambda T^* M$, а не как на форму со значениями в сечениях.

Доказать, что тогда $\nabla \wedge s = ds$, то есть это обычный внешний дифференциал формы $s$. Чему равно выражение $\nabla \wedge s$ для несимметричной связности $\nabla$ в касательном расслоении $TM$?