НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11. Оператор Лапласа-Бельтрами, минимальные подмногообразия, гармонические отображения. 2.06.2020.

Задача 1. Доказать обобщённую теорему Гаусса-Остроградского: если риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, то

$$\int_M \operatorname{Div} X dVol_M = \int_{\partial M} (X, \vec{n}) dVol_{\partial M},$$

где $\vec{n}$ — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $dVol_M$ и $dVol_{\partial M}$ — формы объема, индуцированные $(\cdot\,,\cdot)$ и $(\cdot\,,\cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M, а $c_1(t)$, $\dots$, $c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c_i'(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 3. Доказать, что катеноид $f(s,t) = (\operatorname{ch} s \cos t, \operatorname{ch} s \sin t, s)$, геликоид $f(s,t) = (t\cos s, t\sin s, s)$ являются локально изометричными минимальными поверхностями в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4*. Доказать, что поверхность Эннепера

$$f(s,t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2 t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right)$$

является минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^3$.

Задача 5. Рассмотрим дважды периодическое отображение

$$\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

заданное явной формулой

$$\Psi_{m,k}(x,y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y).$$

Его образ в $\mathbb{R}^4$ обозначается $\tau_{m,k}$. Поверхности $\tau_{m,k}$ с индуцированной вложением в $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ метрикой называются τ-поверхностями Лоусона, в зависимости от типа их называют также лоусоновыми торами и лоусоновыми бутылками Клейна.

Доказать, что

a) $\tau_{m,k}$ является погруженным (то есть с самопересечениями) подмногообразием единичной трёхмерной сферы размерности два;

b) $\tau_{m,k} \cong \tau_{k,m}$;

c) если $(m,k) = 1$, $(m',k') = 1$ и $(m,k) \neq (m',k')$ как неупорядоченные пары, то $\tau_{m,k} \ncong \tau_{k,m}$;

d) пусть $(m,k) = 1$, тогда если m, k нечётные, то $\tau_{m,k}$ является тором, а если одно из чисел m, k является чётным, то $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна;

e) $\tau_{m,k}$ является минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^3$;

f) ограничения координатных функций объемлющего пространства на наши поверхности $x^i|_{\tau_{m,k}}$, $i = 1, \ldots, 4$, являются собственными фунциями оператора Лапласа-Бельтрами на $\tau_{m,k}$ с собственным числом 2;

g) единственная поверхность $\tau_{m,k}$ без самопересечений — это $\tau_{1,1}$, индуцированная метрика на $\tau_{1,1}$ евклидова, то есть это тор Клиффорда.

Задача 6. Доказать, что для изометрических погружений минимальность эквивалентна гармоничности.

Задача 7. Может ли на компактном многообразии быть киллингово поле вида $\operatorname{grad} f$?

Задача 8. Назовём функцию обобщённо линейной, если её гессиан нулевой. Доказать, что если M — минимальное подмногообразие N, а f — обобщённая линейная функция на N, то её ограничение $f|_M$ является гармонической функцией.

Задача 9. Докажите формулу Бохнера: если u гладкая функция на римановом многообразии, то

$$\Delta\left(\frac{|\operatorname{grad} u|^2}{2}\right) = \langle \operatorname{grad} \Delta u, \operatorname{grad} u\rangle + |\operatorname{Hess} u|^2 + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u).$$

Задача 10*. Доказать, что если X киллингово векторное поле, а ω гармоническая форма, то $L_X\omega = 0$.