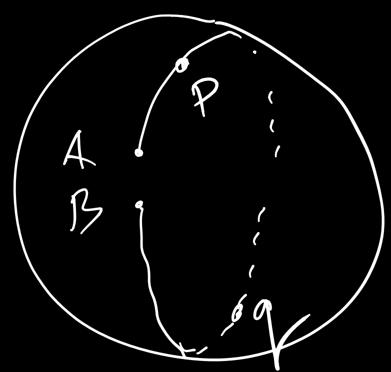
Лекция 17

1. Сопряжённые точки и минимальность геодезических
2. Градиент функции
3. Дивергенция векторного поля, связь с производной Ли формы объёма
4. Теорема Грина
5. Оператор Лапласа - Бельтрами
6. Лемма Хопфа
7. Еще одна теорема Грина
8. Оператор Лапласа - Бельтрами и функциональный анализ. Отношение Рэлея
9. Формулы в координатах.
10. Первая вариация функционала площади, минимальные подмногообразия

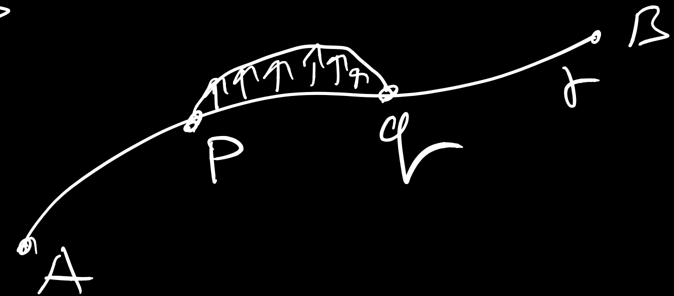
в след. раз



p и q антиподальные $\Rightarrow$ сопряжение $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ геодезическая AB не минимальна

Th Если на геодезической AB на римановом многообразии есть пара сопряженных точек, то эта геодезическая не минимальна

⊳



Пусть A и B не сопряжены вдоль γ.
Тогда вторая вариация — невырожденная квадратичная форма
p и q сопряжены $\Rightarrow$ есть якобиево поле J,
обр. в ноль в p и q.

Рассмотрим поле $W = \begin{cases} J & \text{между } p \text{ и } q \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$E_{**}(W,W) = 0 \Rightarrow$ есть подпространство, на котором $\bar{E}_{**}$ отрицательно определена $\Rightarrow$ есть такие вариации, вдоль которых энергия убывает $\Rightarrow$ геодезическая не минимальна

A и B сопряжены $\Rightarrow$ вблизи не сопряжены A' и B'
(если AB минимальна, то A'B' тоже минимальна)

Далее предыдущее рассуждение

до Кармо Риманова геометрия

Chavel Riemannian geometry. A modern introduction

Оператор Лапласа-Бельтрами

$\mathbb{R}^n$ $\quad \Delta = -\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial (x^n)^2}$

$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$

(M, g) риманово многообразие

Градиент функции

$f \in C^\infty(M) \qquad df \in \Omega^1(M)$

<u>Опр</u> $\operatorname{grad} f$ - это такое векторное поле, что $\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = df(X) = Xf$

g_{ij} метрика

$$g_{ij} (\operatorname{grad} f)^i X^j = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$g_{ij} (\operatorname{grad} f)^i = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$g^{kj} g_{ji} = \delta^k_i$$

$$\underbrace{g^{kj} g_{ji}}_{\delta^k_i} (\mathrm{grad}\, f)^i = g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$(\mathrm{grad}\, f)^k = g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

(M, g) $\quad\nabla$ связность Леви-Чивита

X фикс. вект поле

$Y \mapsto \nabla_Y X$ линейный оператор

Опр $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}[Y \mapsto \nabla_Y X]$

Утв 1) e_i базис в касат. полях, то

$$\operatorname{div} X = \sum_i (\nabla_{e_i} X)^i = X^i_{;i}$$

2) e_i О/Н базис $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} X = \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$$

Утв $\operatorname{div}(fX) = Xf + f\operatorname{div} X$

▷ e_i о/н

$$\operatorname{div} fX = \sum_i \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle =$$

$$= \sum_i \langle (e_i f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle =$$

$$= \sum_i (e_i f)X^i + f\operatorname{div} X =$$

$$= Xf + f\operatorname{div} X \quad ◁$$

Теорема Если M ориентировано, то

$$L_X dVol = \operatorname{div} X \cdot dVol$$

▷ e_i о/н базис e^i дуальный базис

$$\Rightarrow dVol = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$$

$$L_X dVol = L_X(e^1 \wedge \ldots \wedge e^n) =$$

$$= \sum_i e^1 \wedge \ldots \wedge L_X e^i \wedge \ldots \wedge e^n =$$

$$= \sum_i e^1 \wedge \ldots \wedge (L_X e^i, e_i)\, e^i \wedge \ldots \wedge e^n =$$

спаривание вектора и ковектора

$$= \left(\sum_i (L_X e^i, e_i)\right) e^1 \wedge \dots \wedge e^n =$$

$$(e^i, e_i) = 1 \Rightarrow (L_X e^i, e_i) + (e^i, L_X e_i) = 0$$

$$= \left(-\sum_i (e^i, L_X e_i)\right) dVol =$$

$$= \left(-\sum_i \langle L_X e_i, e_i \rangle\right) dVol =$$

$$= \left(-\sum_i \langle [X, e_i], e_i \rangle\right) dVol =$$

$$= \left(-\sum_i \langle \nabla_X e_i - \nabla_{e_i} X, e_i \rangle\right) dVol =$$

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \Rightarrow X\langle e_i, e_i \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\langle \nabla_X e_i, e_i \rangle = 0$$

$$= \left(\sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle\right) dVol =$$

$$= \operatorname{div} X \cdot dVol$$

$(x^1,\dots,x^n)$ $\quad U \subset M$

$x^1,\dots,x^n$ локальные к-ты

$g_{ij} \qquad g = \det g_{ij}$

$$dVol = \sqrt{g}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$$

$$L_X dVol = L_X dVol =$$

$$= d\,\iota_X dVol + \cancel{\iota_X d\, dVol} =$$

$$= d\,\iota_X(\sqrt{g}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n) =$$

$$= d\Big(\sum_i (-1)^i \sqrt{g}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^i(X)\wedge\dots\wedge dx^n\Big) =$$

$$= d\Big(\sum_i (-1)^{i-1} X^i \sqrt{g}\, dx^1\wedge\dots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n\Big) =$$

$$= \sum_i (-1)^{i-1} d(X^i\sqrt{g})\wedge dx^1\wedge\dots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n =$$

$$= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, X^i)\, dx^i\wedge dx^1\wedge\dots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n =$$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, X^i)\, \underbrace{dx^1\wedge\dots\wedge dx^n}_{\frac{1}{\sqrt{g}} dVol} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, X^i\right) dVol$$

Утв $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, X^i\right)$

Теорема Грина. Пусть M — ориентированное компактное риманово многообразие без края. Тогда $\forall$ векторного поля X

$$\int_M \operatorname{div} X \, dVol = 0$$

▷ $\int_M \operatorname{div} X \, dVol = \int_M L_X \, dVol =$

$= \int_M d\left(i_X \, dVol\right) \underset{\text{Теорема Стокса}}{=} 0$ ◁

Опр Оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

$$\Delta f^2 = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f^2 =$$
$$= -\operatorname{div}(2f \operatorname{grad} f) =$$
$$= -2\operatorname{grad} f \cdot f - 2f \operatorname{div}\operatorname{grad} f =$$

$$Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$
$$\operatorname{grad} f \cdot f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \langle df, df \rangle = |df|^2$$

индуцированное скалярное произведение в T^*M

$$= -2|df|^2 + 2f\Delta f$$

<u>Итог</u> $\Delta f^2 = -2|df|^2 + 2f\Delta f$

<u>Лемма Хопфа</u> Пусть M — связное компактное ориентированное риманово м-е без края. Если $\Delta f \geq 0$ (или $\Delta f \leq 0$), то $f = \mathrm{const}$ и $\Delta f = 0$

$$\triangleright \int \underbrace{\Delta f}_{\geq 0 \text{ или } \leq 0} dVol = -\int \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\, dVol \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Теорема} \\ \text{Грина}}}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f = 0$$

$$\underbrace{\int_M \Delta f^2 \, dVol}_{\substack{\text{Теорема Грина} \\ = 0}} = -2\int_M |df|^2 \, dVol + 2\int f \underbrace{\Delta f}_{=0} \, dVol$$

$$\Rightarrow \int_M \underbrace{|df|^2}_{\geq 0} \, dVol = 0 \Rightarrow |df|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df = 0 \Rightarrow f = \text{const} \text{ и } \Delta f = 0$$

$\blacksquare$

<u>**Опр**</u> Если $\Delta f = 0$, то f называется гармонической

<u>**Следствие**</u> На связном компактном ориентированном мн-ии без края гармонические функции — это в точности константы.

<u>**Замечание**</u> В Лемме Хопфа и следствии требование ориентированности можно опустить

$\tilde M$ Двулистное ориентир. накрытие

$\pi \downarrow$

M не ориентируемо

$f : M \to \mathbb{R}$ $\quad \Delta f \geq 0$

$\pi^* f : \tilde M \to \mathbb{R}$ $\quad \Delta \tilde f \geq 0 \Rightarrow \tilde f = const$

$\Rightarrow f = const$

Еще одна Теорема Грина

Th Пусть M — компактное ориентированное риманово мн-е без края, $u, v \in C^\infty(M)$. Тогда

$$\int (u\Delta v - v \Delta u)\, d\mathrm{Vol} = 0$$

▶ $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \operatorname{grad} v \cdot u + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v =$

$= \langle dv, du \rangle - u\Delta v$

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, d\mathrm{Vol} = \cancel{\int_M \langle dv, du\rangle\, d\mathrm{Vol}} -$$

$$-\underbrace{\int_M \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)\, dVol}_{=0} - \underbrace{\int_M \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)\, dVol}_{=0} -$$

$$- \cancel{\int_M \langle du, dv \rangle\, dVol} = 0$$

$$\int_M u \Delta v\, dVol = \int_M v \Delta u\, dVol$$

$$(u, \Delta v) = (\Delta u, v)$$

Δ самосопряжённый

$$\Delta f^2 = -2|df|^2 + 2f\Delta f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_M f \Delta f\, dVol = \int_M \langle df, df \rangle\, dVol \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_M u \Delta v\, dVol = \int_M \langle du, dv \rangle\, dVol$$

Факт из функционального анализа. Пусть M — компактное ориентированное риманово многообразие. Тогда

1) спектр состоит только из собственных чисел

$$\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$$

собственное число

собственная функция

2) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \ldots$

гармонические = константы

только константы

3) собственные числа имеют конечную кратность и стремятся к $+\infty$.

Вариационное описание собственных чисел

$\dim V = n$, евклидово

$A : V \to V$ с/с оператор $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$

$$\lambda_1 = \inf_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

$$\lambda_n = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

$$\lambda_k = \inf_{E_k \subset V} \sup_{\substack{v \in E_k \\ \neq 0}} \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

E_k — k-мерное подпр-во V

Факт из функционального анализа: $0 \le \Delta$

$$\lambda_k = \inf_{E_k \in H^2(M)} \sup_{\substack{u \in E_k \\ \neq 0}} \frac{\int_M |du|^2 \, d\mathrm{Vol}}{\int_M u^2 \, d\mathrm{Vol}} =: R[u]$$

$|du|^2 = |\nabla u|^2$

соболевское пр-во

отношение Рэлея (Rayleigh)

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, X^i\right)$$

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

$$(\operatorname{grad} f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Утв $\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$

Утв e_i о/н базис, то

$$\Delta f = -\sum_i \left(e_i(e_i f) + (\nabla_{e_i} e_i) f\right)$$

▷ e_i о/н $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f = \sum_i (e_i f) e_i$

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f = -\operatorname{div}\left(\sum_i (e_i f) e_i\right) =$$

$$= -\sum_i \left(e_i(e_i f) + (e_i f) \operatorname{div} e_i\right) =$$

$$= -\sum_i \left(e_i(e_i f) + (e_i f) \sum_j \langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle\right) =$$

$$\sum_j (\nabla_{e_j} e_j) f = \sum_j \langle \nabla_{e_j} e_i, e_i \rangle (e_i f)$$

$$= -\sum_i \left(e_i(e_i f) + (\nabla_{e_i} e_i) f\right)$$