Лекция 15

1. Длина геодезических
2. Геодезические координаты
3. Полугеодезические координаты
4. Свойство геодезической быть локально кратчайшей
5. Вариационный подход к описанию геодезических. Функционалы длины и энергии.
6. Первая вариация функционала энергии.

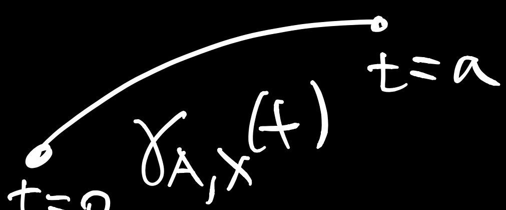
в след. раз

7. Вторая вариация функционала энергии
8. Уравнение Якоби и якобиевы поля.
9. Сопряженные точки, их кратность
10. Якобиевы поля и геодезические вариации.

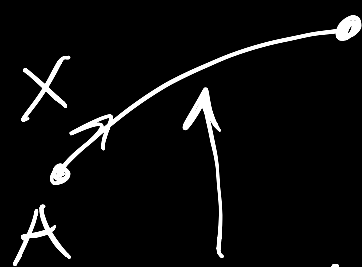
① Длина геодезических

$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \Rightarrow \dot\gamma \parallel$ вдоль $\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow |\dot\gamma| = const \Rightarrow |\dot\gamma(t)| = |\dot\gamma(0)|$



$$\ell = \int_0^a |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_0^a \underbrace{|\dot\gamma(0)|}_{=|X|}\,dt = a|X|$$



$\exp_A X = \gamma_{A,X}(1)$

$\ell = |X|$

---

② Геодезические к-ты

$$U \underset{\sim}{\overset{\exp_A}{\rightleftarrows}} \tilde{U}$$

(M, g) риманово

выберем $e_1, .., e_n$ о/н базис в $T_A M$

$$X = X^i e_i$$

Можно взять $X^1, .., X^n$ в качестве координат точки $\exp_A X \in \tilde{U}$

<u>Опр</u> $X^1, .., X^n$ – геодезические координаты в $\tilde{U}$, центрированные в точке A.

<u>Упр</u> в геодезических к-тах, центрированных в точке A, верно

$$\Gamma_{ij}^k (A) = 0.$$

③ Полугеодезические координаты

$$g = \begin{pmatrix} & & \\ & g_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$$

<u>Опр</u> к-ты $x^1, \dots, x^n$ называются полугеодезическими, если

$$g = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{*}_{(n-1)\times(n-1)} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \dots \ 0 & 1 \end{array}\right)$$

или, что то же самое,

$$g = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\, dx^i dx^j + d(x^n)^2$$

<u>Упр</u> Кривые $x^1 = c_1, \dots, x^{n-1} = c_{n-1}$, $x^n = t$ являются геодезическими

<u>Пример</u> 1) декартовы к-ты в $\mathbb{R}^n$

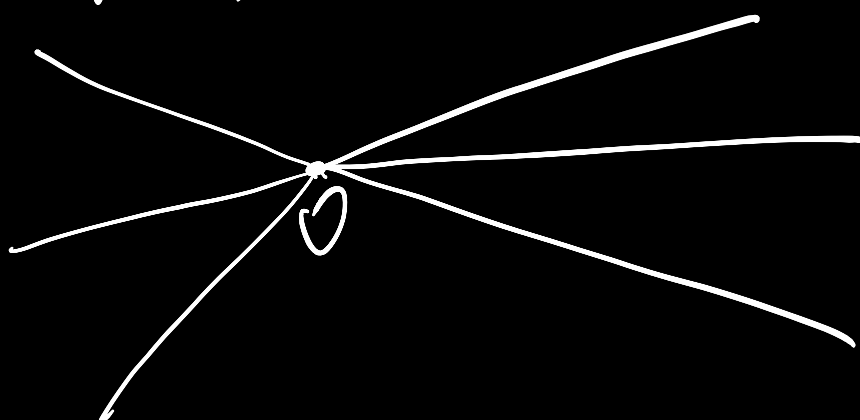
$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

2) полярные к-ты φ, r в $\mathbb{R}^2$

$$g = r^2 d\varphi^2 + dr^2$$

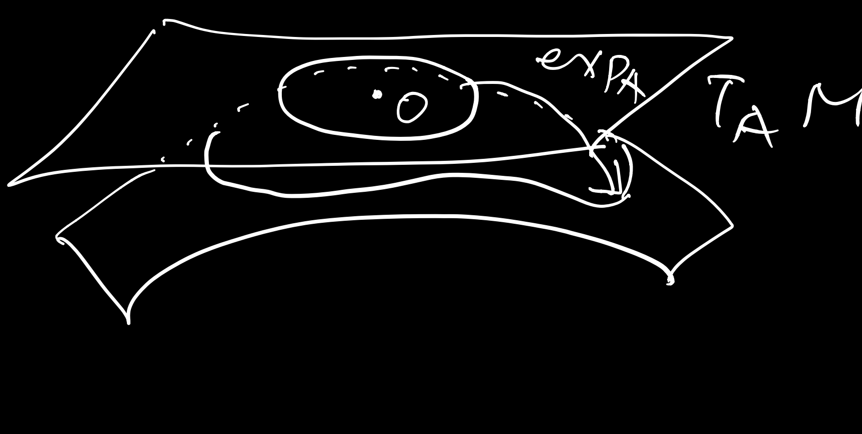
$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = c$, $r = t$ геодезические



3) Сферические - - - -

Построение полугеодезических к-т на римановом многообразии



$\Sigma(A,r) = \{X \in T_A M \mid |X| = r\}$ —

— сфера радиуса r с центром 0 в $T_A M$.

$\tilde{\Sigma}(A,r) = \exp_A \Sigma(A,r) \subset M$

геодезическая сфера радиуса r с центром в точке A.

$B(A,r) = \{X \in T_A M \mid |X| < r\}$ —

— шар радиуса r с центром в 0 в $T_A M$

$\tilde{B}(A,r) = \exp_A B(A,r)$ геодезический шар радиуса r с центром в A.

Утв $\tilde{\Sigma}(A,r) \perp \exp_A tx$

$e_1,\dots,e_n$ — о/н базис в T_AM

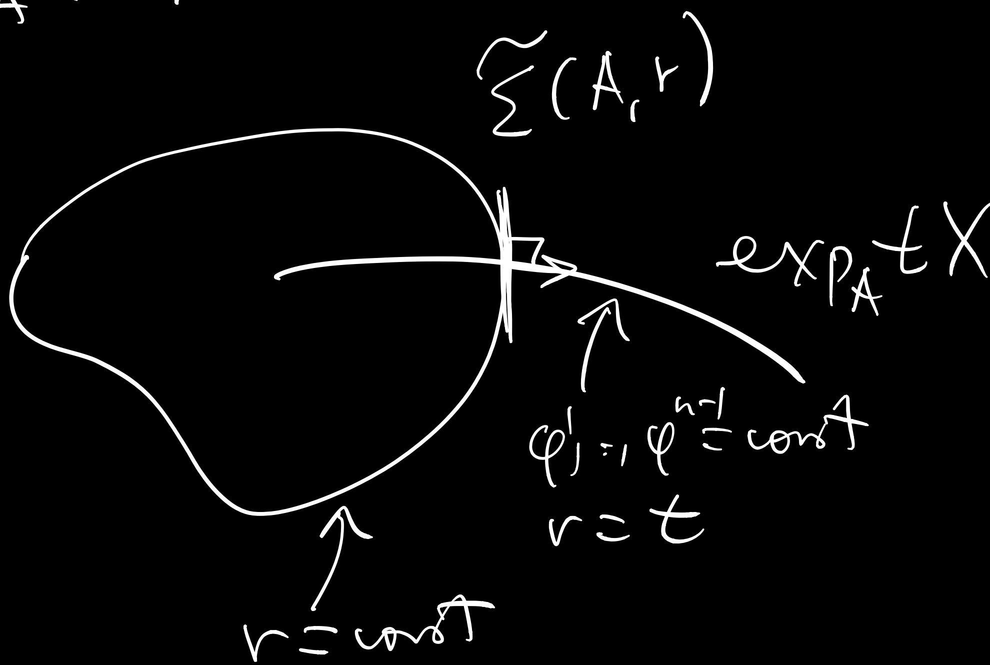
$x^1,\dots,x^n$ — декартовы к-ты в T_AM

введем в T_AM многомерные сферические к-ты

$$x^1 = r\sin\varphi^1\sin\varphi^2\dots\sin\varphi^{n-1}$$
$$x^2 = r\cos\varphi^1\sin\varphi^2\dots\sin\varphi^{n-1}$$
$$x^3 = r\cos\varphi^2\sin\varphi^3\dots\sin\varphi^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$x^{n-1} = r\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^{n-1}$$
$$x^n = r\cos\varphi^{n-1}$$

Будем брать $\varphi^1, \dots, \varphi^{n-1}, r$ в качестве к-т точки

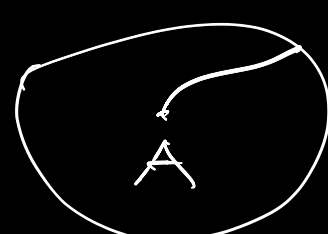
$$\exp_A(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n)$$



$$g = \left(\begin{array}{ccc|c} & * & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

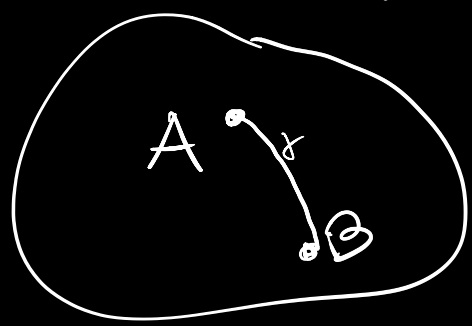
полугеодезические координаты

в $\tilde{U} \setminus L$



(4) Свойство геодезической быть локально кратчайшей.

$\tilde{U}$



$x^1, \dots, x^n$ – полугеодезические к-ты, только что введённые

$\gamma(t)$ – геодезическая, соединяющая A и B

$\exp_A tX$

$x^1 = c_1$ $\qquad$ $A \quad x^n = t = 0$

$\vdots$

$x^{n-1} = c_{n-1}$ $\qquad$ $B \quad x^n = t = t_1$

$x^n = t$

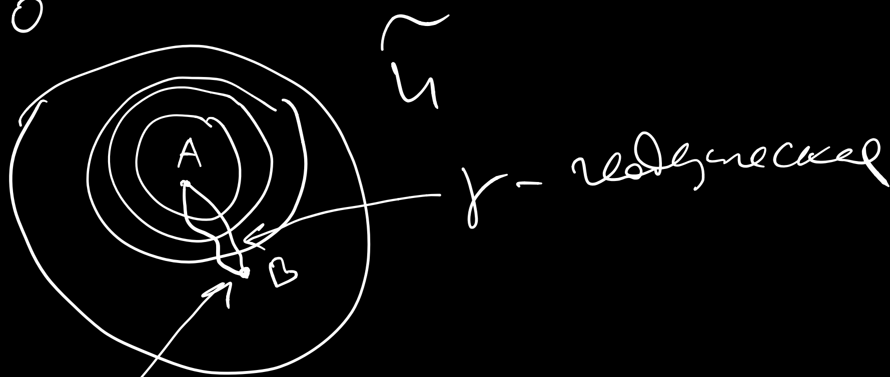
$$L[\gamma] = \int_0^{t_1} |\dot{\gamma}| dt =$$

$$\gamma(t) = (c_1, \dots, c_{n-1}, t)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (0, \dots, 0, 1)$$

$$|\dot\gamma|^2 = (0,\dots,0,1)\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\dots 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1$$

$$= \int_0^{t_1} dt = t_1$$



σ – другая кривая, соединяющая A и B в $\tilde U$

Пусть σ может быть запараметризована через $x^n = t$

$$\sigma(t) = (x^1(t),\dots,x^{n-1}(t), t)$$

$$L[\sigma] = \int_0^{t_1} |\dot\sigma|\, dt =$$

$$\dot\sigma(t) = (\dot x^1,\dots,\dot x^{n-1}, 1)$$

$$|\dot\sigma| = \sqrt{(\dot x^1 \ldots \dot x^{n-1}\ 1)\left(\begin{array}{c|c} g_{ij} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}\dot x^1\\ \vdots\\ \dot x^{n-1}\\ 1\end{pmatrix}}$$

$$= \int_0^{t_1} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\dot x^i \dot x^j + 1}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{t_1} \sqrt{1}\, dt = t_1 = L[\gamma]$$

если равенство, то в силу положительной определенности

$\dot x^1 = 0, \ldots, \dot x^{n-1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^1 = c_1, \ldots, x^{n-1} = c_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(t) = (c_1, \ldots, c_{n-1}, t) = \gamma(t)$

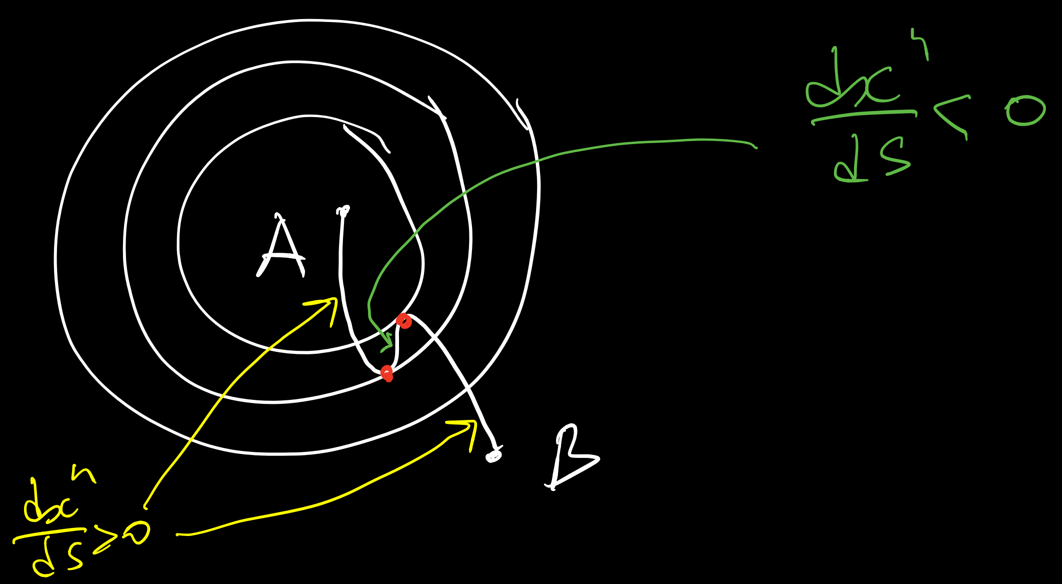
<u>Утв</u> Локально (в нормальной окрестности точки A) геодезическая является единственной

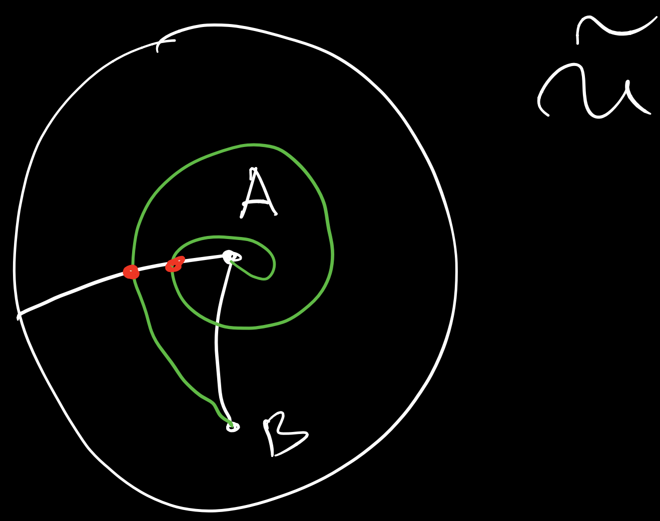
кратчайшей, соединяющей две точки

Что, если x^n нельзя взять в качестве параметра на σ?

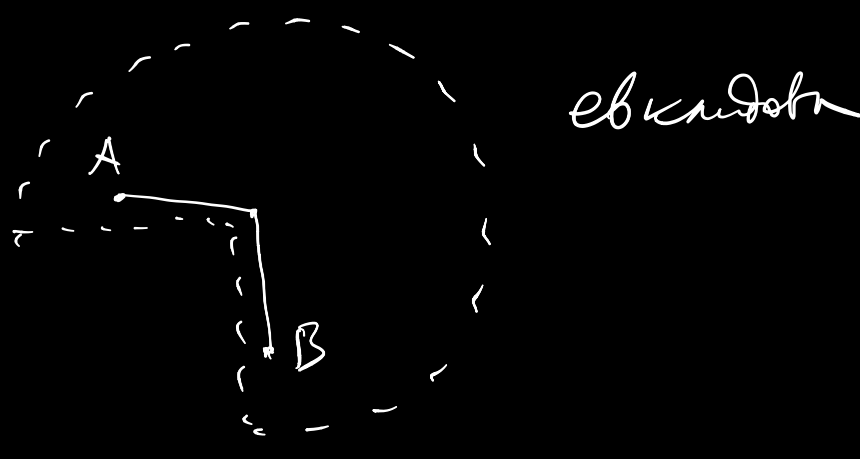
$$\sigma(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$$

$\frac{dx^n}{ds} \gtrless 0$ — то x^n можно взять в качестве параметра по теореме об обратной функции

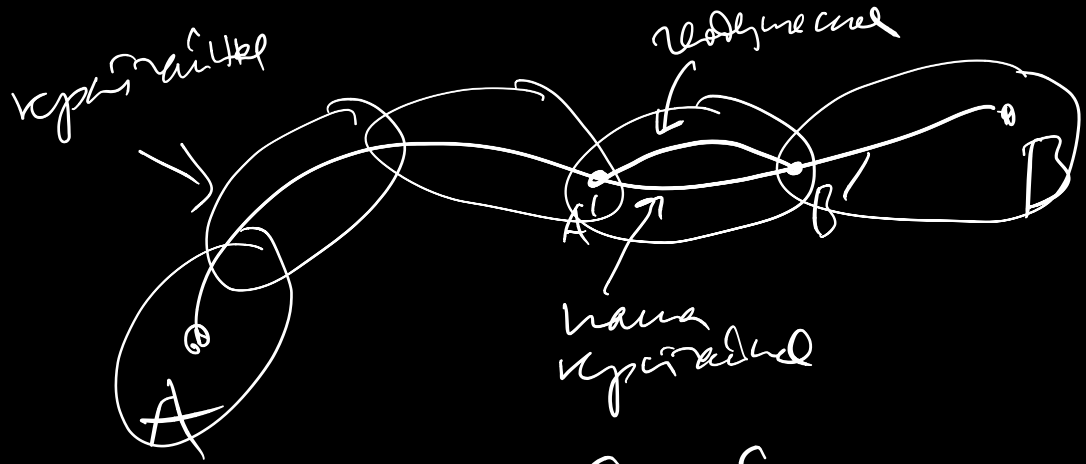




Может быть так, что кратчайшей нет

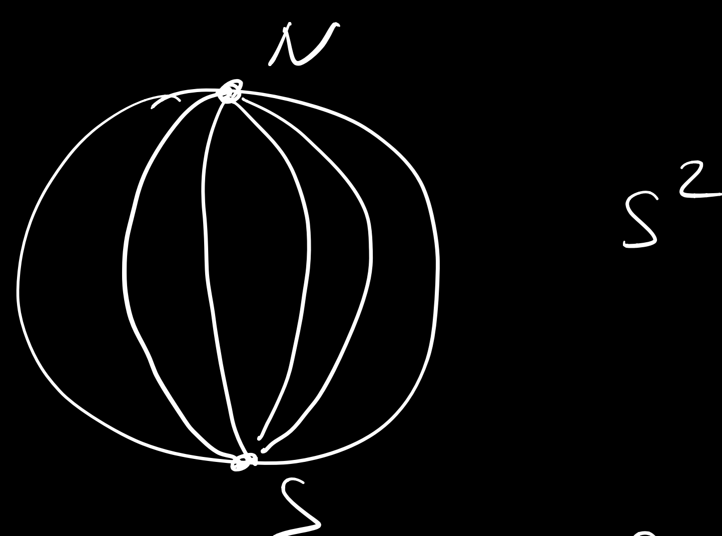


<u>Утв</u> Если существует кратчайшая, соединяющая A и B, то это геодезическая

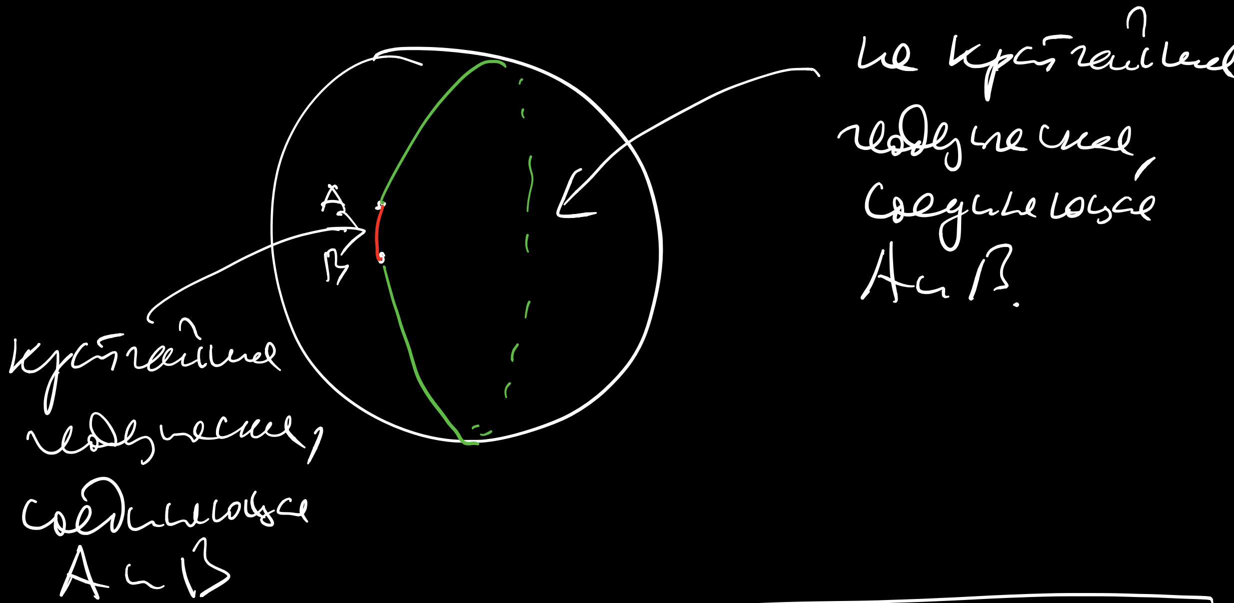


Поиск кратчайшей у нас в классе кусочно-гладких путей

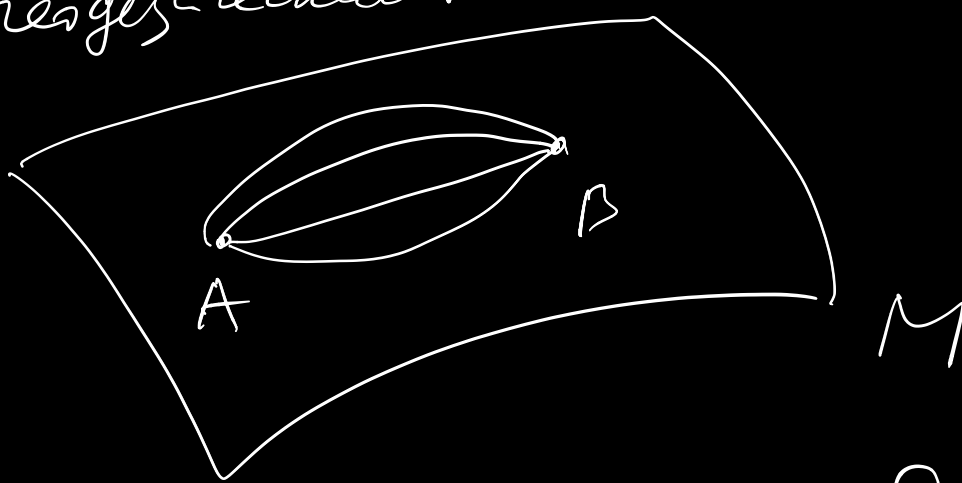
Глобально кратчайшая может быть не единственной, но будет геодезической



все меридианы — кратчайшие и геодезические, соединяющие полюса сферы



(5) Вариационный подход к геодезическим.



Пр-во кусочно-гладких путей γ, соединяющих A и B, таких, что $\gamma(0)=A$ и $\gamma(1)=B$

$$L[\gamma] = \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt$$

функционал длины

кратчайшие кривые — минимум этого функционала

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{(\dot\gamma, \dot\gamma)}$$

$$E[\gamma] = \int_0^1 |\dot\gamma(t)|^2\, dt$$

функционал энергии

$$|(v, w)| \le |v||w| \iff (v,w)^2 \le |v|^2|w|^2$$

равенство только если $v \parallel w$

Неравенство Шварца

$$\left(\int_0^1 fg\, dt\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2 dt\right)\left(\int_0^1 g^2 dt\right)$$

равенство при $g = cf$

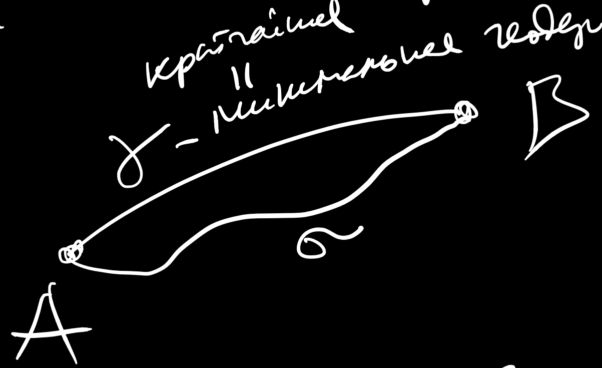
$f = 1 \quad g = |\dot\gamma|$

$$\left(\int_0^1 |\dot\gamma|\, dt\right)^2 \le \underbrace{\left(\int_0^1 dt\right)}_{=1}\left(\int_0^1 |\dot\gamma|^2 dt\right)$$

$$(L[\gamma])^2 \le E[\gamma]$$

и равенство при $|\dot\gamma| = c$,

то есть если γ параметризована аффинным натуральным параметром



$$E[\gamma] = L^2[\gamma] \le L^2[\sigma] \le E[\sigma]$$

т.к. геодезические γ всегда с аффинным натуральным параметром

равенство только если σ – геодезическая с произвольным параметром

равенство только если параметризация натуральная аффинная

Утв Пусть есть кратчайшая, соединяющая A и B. Тогда минимум E на пространстве кусочно-гладких путей, соединяющих A и B, таких, что $\gamma(0)=A$, $\gamma(1)=B$, достигается в точности на минимальных (= кратчайших) геодезических, соединяющих A и B.