# ТОПОЛОГИЯ–3
# ЛИСТОК 9: КЛАСС ЭЙЛЕРА И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

**1.** Пусть $i\colon M^m \to N^{m+k}$ — гладкое вложение замкнутых ориентированных многообразий с нормальным расслоением $\nu$ и классом Тома $\theta(\nu) \subset H^k(E\nu, (E\nu)_0)$, и пусть $j\colon (N, \varnothing) \to (N, N\backslash M)$ — вложение пар. Докажите, что класс $j^*\theta(\nu) \in H^k(N)$ двойствен по Пуанкаре к классу $i_*[M] \in H_m(N)$.
*Указание:* надо проверить, что $[N] \frown (j^*\theta(\nu)) = i_*[M]$, что эквивалентно соотношению $j_*[N] \frown \theta(\nu) = i_*[M]$. Проверьте это соотношение, воспользовавшись определением фундаментальных классов и класса Тома как единственных классов, которые при ограничении на $(N, N \setminus x)$, $(M, M \setminus x)$ и слой нормального расслоения $\nu$ дают канонические образующие в группах локальных (ко)гомологий.

**2.** Докажите, что при $n = 2^p$ проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ нельзя гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.

**3.** Пусть $M^m$ — ориентированное многообразие. Рассмотрим отображение
$$j_x\colon (M, M \setminus x) \to \big(M \times M, (M \times M) \setminus \Delta(M)\big), \quad j_x(y) = (x, y),$$
где $\Delta\colon M \to M \times M$ — диагональное отображение. Пусть
$$\theta_\Delta \in H^m\big(M \times M, (M \times M) \setminus \Delta(M)\big)$$
— класс Тома. Докажите, что $j_x^*(\theta_\Delta) \in H^M(M, M\backslash x)$ — каноническая образующая, задаваемая ориентацией мнообразия $M$.

**4.** При каких $n$ на сфере $S^n$ существует нигде не обращающееся в нуль векторное поле? Тот же вопрос для $\mathbb{C}P^n$.

---

*Date*: 11 апреля 2019 г.