Задача 6.1. Пусть $\Phi(n)$ — количество правильных несократимых дробей со знаменателем не больше n. Докажите, что $\Phi(n) = \frac{1}{2}\sum \mu(d)\lfloor n/d\rfloor\lfloor 1+n/d\rfloor$.

▷ Напомним, что производящая функция Дирихле последовательности a_n — это функция $s \mapsto \sum a_n n^{-s}$.

Задача 6.2. Найдите (выразите через дзета-функцию Римана) производящую функцию Дирихле последовательности

а) $\sqrt{n}$; б) $\mu(n)$; в) $\phi(n)$; г) $\sigma_0(n)$; д) [n нечетно]; е) [n своб. от квадратов].

(σ_0 — количество делителей; квадратные скобки — индикаторная функция.)

Задача 6.3. а) Многограник в $\mathbb{R}^m$ задан неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant 1$. Найдите его объем.

б) Многогранник $\Pi_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}_{\geqslant 0}$ задан неравенствами

$$\begin{gathered}\phi_1+\phi_2 \leqslant \pi/2;\\ \phi_2+\phi_3 \leqslant \pi/2;\\ \ldots\\ \phi_{2n}+\phi_1 \leqslant \pi/2.\end{gathered}$$

Выразите его объем через число зигзагообразных перестановок из задачи 5.4.

Задача 6.4. а) Докажите, что

$$\mathrm{Vol}(\Pi_{2n}) = \int\limits_{[0,1]^{2n}} \frac{dx_1\ldots dx_{2n}}{1-x_1^2x_2^2\ldots x_{2n}^2} = 1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots$$

(указание: $x_1 = \sin\phi_1/\cos\phi_2$, $x_2 = \sin\phi_2/\cos\phi_3, \ldots$ — ср. с заменой $x = \sin\phi/\cos\phi$, вычисляющей интеграл функции $(1+x^2)^{-1}$).

б) Выведите из предыдущего пункта, что $\zeta(2n)$ — рациональное кратное π^{2n}.