Исчисление вариаций

▷ *Задачи со звёздочкой зачитываются за две.*

7◇1 Покажите, что если $a, b, c \in C^0[a,b]$, то на $C^1[a,b]$ функционал $g(h)$ бесконечно мал в нуле.

$$g(h) = \frac{\displaystyle\int_a^b \Big(a(x)h^2(x) + b(x)h(x)h'(x) + c(x)h'^2(x)\Big)\,dx}{\|h\|}$$

7◇2 Найдите общий вид вариации для функционала

$$S\colon y(x) \mapsto \int\limits_a^b L\big(x, y', \dots, y^{(n)}\big)dx$$

7◇3 Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ открыто и Ω — множество функций $y(x)$ из $C^1[a,b]$, таких что при всех $x \in [a,b]$ выполняется $\big(x, y(x), y'(x)\big) \in U$. Покажите что Ω открыто.

7◇4* Покажите, что пространство $C^k[a,b]$ банахово при всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7◇5 Найдите дифференциальные уравнения экстремалей для лагранжианов

- $L(x,y,y') = \frac{1}{2}e^{\alpha x}\left(\big(y'(x)\big)^2 - k\big(y(x)\big)^2\right)$
- $L(x,y,y') = e^{-\big(y(x)\big)^2 - \big(y'(x)\big)^2} + 2y'(x)e^{-\big(y(x)\big)^2}\displaystyle\int\limits_0^{y'(x)} e^{-s^2}ds$

7◇6 Покажите, что если лагранжиан $L(y, y')$ не зависит явно от x, то на всякой его экстремали $\hat{y}(x)$ выполняется *закон сохранения энергии:*

$$\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L\right)\bigg|_{y(x)=\hat{y}(x)} = E = const$$

7◇7 Покажите что на множестве $Y = \{y(x) \in C^1[-1,1], y(-1) = a \neq b = y(1)\}$ функционал

$$S_\lambda\colon y(x) \mapsto \int\limits_{-1}^{1}(x^2+\lambda^2)\big(y'(x)\big)^2dx$$

- При всяком $\lambda \neq 0$ имеет единственный глобальный минимум на Y.
- При $\lambda = 0$ не имеет минимумов на Y и $\inf\limits_{y\in Y} S_0(y) = 0$.

7◇8* Из физики известно, что если для упругой балки длины l, постоянной ширины h (по горизонтали) и переменной толщины $H(x)$ (по вертикали) рассмотреть её малую деформацию (изгиб) в вертикальной плоскости, то потенциальная энергия такой упругой деформации с точностью до $o(\|y\|)$ будет иметь вид

$$U_{def}(x) = \int\limits_0^l \alpha^2 \cdot \big(y''(x)\big)^2 \big(H(x)\big)^3 dx$$

где $y(x)$ отвечает отклонению балки от горизонтали. Потенциальная энергия такой балки в однородном гравитационном поле земли с точностью до $o(\|y\|)$ имеет вид

$$U_{grav}(x) = \int\limits_0^l \beta^2 \cdot y(x) H(x) dx$$

Пусть балка в однородном гравитационном поле земли горизонтально вмонтирована в стену, так что торчащая из стены её часть имеет длину L, постоянную ширину h и толщину $H(x) = H_0(1 - \frac{x}{L})$. Балка жёсткая и отклонение её от горизонтали мало.

В положении равновесия балка стремится минимизировать свою энергию складывающуюся из $U_{def}(y)$ и $U_{grav}(y)$. Найдите соответствующий профиль балки $y(x)$.