Меры на $\mathbb{R}$

▷ *Зададим жордановское продолжение аддитивной меры μ с полукольца S полностью аналогично лебеговскому из предыдущей лекции с единственной разницей в конструкции верхней меры. А именно, положим её равной инфимуму лишь по всем конечным, а не счётным объединениям множеств полукольца S. Получившееся продолжение меры μ называется мерой Жордана на кольце $J(S,\mu)$ измеримых по Жордану множеств.*

3◇1. Покажите, что в случае плоскости $\mathbb{R}^2$ мера Жордана инвариантна относительно поворотов.

3◇2. Зададим на полукольце S открыто-замкнутых интервалов $[a,b) \subset [0,1]$ меру $\mu\big([a,b)\big) = \ln\frac{1+b}{1+a}$. Рассмотрим преобразование $f\colon x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$. ($\{\cdot\}$ — дробная часть) Докажите, что для всякого измеримого множества A выполняется $\mu\big((f^{-1}(A))\big) = \mu(A)$. Верно ли обратное?

3◇3. Найдите меру Лебега подмножества отрезка $[0,1]$ состоящего из чисел, в десятичной записи которых цифра 2 встречается раньше цифры 3.

3◇4. Докажите, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой представимо в виде объединения борелевского и множества меры ноль.

3◇5. Постройте пример не $\sigma-$аддитивной меры.

▷ *Вещественнозначная функция ν на $\sigma-$кольце $R \subset P(X)$ называется зарядом, если для любых $A_i \in R$ таких что $A = \bigsqcup A_i \in R$ ряд $\sum \nu(A_k)$ сходится абсолютно и его сумма равна $\nu(A)$.*

3◇6. Пусть ν — заряд на σ-алгебре $U \subset P(X)$. Докажите что $\sup\limits_{A\in U} \nu(A) < +\infty$ и $\inf\limits_{A\in U} \nu(A) > -\infty$.

3◇7. Докажите, что верхняя и нижняя грани из предыдущей задачи достигаются на некоторых множествах A_+ и $A_- \in U$.

▷ *На множестве Ω последовательностей $\omega_1, \omega_2, \ldots$ из нулей и единиц определим подмножество $\Omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ как состоящее из всевозможных последовательностей, начальный отрезок $\omega_1, \ldots, \omega_n$ которых совпадает с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Очевидно, совокупность всевозможных $\Omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ образует полукольцо. Зададим на нём меру фиксировав произвольное $p \in [0,1]$ и положив*

$$\mu(\Omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) = p^{\sum|\alpha_i|}(1-p)^{n-\sum|\alpha_i|}$$

3◇8. Покажите, что мера всякого множества последовательностей, инвариантного относительно сдвигов $\omega_1, \omega_2, \cdots \mapsto \omega_2, \omega_3, \ldots$, равна либо 0, либо 1.

3◇9. Покажите, что мера всякого множества последовательностей, инвариантного относительно изменения в конечном числе знаков $\omega_i \mapsto \omega_i + 1 \mod 2$, равна либо 0, либо 1.

3◇10. Покажите, что радиус сходимости степенного ряда $\sum \omega_k t^k$ равен одной и той же константе R для всех последовательностей из Ω кроме, быть может, лежащих в некотором множестве меры ноль.