Алгебра Ли алгебраической группы.

Опр. *Пусть X — (аффинное) алгебраическое многообразие. Обозначим через $\mathfrak{m}_x$ (максимальный) идеал функций $\Bbbk[X]$ равных нулю в точке $x \in X$. Касательным пространством в точке $x \in X$ называется векторное пространство $T_x(X) := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.*

Опр. *Пусть X — (аффинное) алгебраическое многообразие. Обозначим через $\mathrm{Der}_x(\Bbbk)$ пространство $\Bbbk$-линейных дифференцирований в точке $x \in X$, то есть таких $\Bbbk$-линейных $\delta : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, что*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(x) + f(x)\delta(g)$$

для любых $f, g \in \Bbbk[X]$. Касательным пространством в точке $x \in X$ называется векторное пространство $T_x(X) := \mathrm{Der}_x(\Bbbk)$.

Опр. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм (аффинных) алгебраических многообразий, $f^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ – соответствующий морфизм алгебр функций. Дифференциалом морфизма f в точке $x \in X$ называется линейное отображение $d_x f : (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \to (\mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2)^*$ определённое следующим образом: $d_x f(l) := f^* \circ l, l \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.*

Опр. *Алгебра Ли над полем $\Bbbk$ – это подалгебра некоторой ассоциативной алгебры над $\Bbbk$, замкнутая относительно коммутатора $[x, y] = xy - yx$.*

Пусть G – алгебраическая группа. Напомним, что имеется два естественных действия G на $\Bbbk[G]$ при помощи правых и левых сдвигов:

$$(\lambda_x f)(y) = f(x^{-1}y) \qquad (\rho_x f)(y) = f(yx)$$

Опр. *Пусть G – алгебраическая группа, $\Bbbk[G]$ – алгебра функций на G. Дифференцированием $\Bbbk[G]$ будем называть $\Bbbk$-линейное отображение $\delta : \Bbbk[G] \to \Bbbk[G]$ такое, что*

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

Алгеброй Ли алгебраической группы G называется пространство $\mathfrak{L}(G) = \{\delta \in \mathrm{Der}(\Bbbk[G]) \mid \delta\lambda_x = \lambda_x\delta\}$ левоинвариантных дифференцирований алгебры $\Bbbk[G]$.

1. Докажите, что два определения касательного пространства – одинаковы, то есть постройте канонический изоморфизм между $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ и $\mathrm{Der}_x(\Bbbk)$.

2. Убедитесь в корректности определения дифференциала.

3. Докажите, что

а) Если $\mathrm{id} : X \to X$ – тождественное отображение, то для любой $x \in X$ $d_x\mathrm{id} : T_x(X) \to T_x(X)$ – тождественное отображение.

б) Если $f : X \to Y, g : Y \to Z$ и $f(x) = y$, то $d_x(g \circ f) = d_y g \circ d_x f$

в) Если $f : X \to Y$ – изоморфизм многообразий, то $d_x f : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ – изоморфизм векторных пространств.

4. Убедитесь, что $\mathrm{Der}_x(\mathbb{A}^n) = \{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \mid a_i \in \Bbbk\}$. Здесь $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ и $\varphi : X \to Y$ – морфзим, так что $\varphi = (\varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_n))$. Отождествим $T_x(X)$ с подпространством $T_x(\mathbb{A}^n)$: $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$. Докажите, что $d_x\varphi(a) = (b_1, \dots, b_m)$, где $b_k = \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}(x)$.

5. Пусть $U \subset X$ – главное открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия. Вспомните, что U само можно наделить структурой аффиного алгебраического многообразия. Докажите, что $T_x(U) \simeq T_x(X)$.

6. Пусть $G = GL(n)$. Рассмотрим морфизм $\det : GL(n) \to G_m$. Докажите, что $d_e \det : \mathrm{Mat}_n \to \Bbbk, A \mapsto \mathrm{tr}\, A$.

7. Пусть $i : Y \to X$ – инъективный морфизм многообразий. Докажите, что $di_y : T_y(Y) \to T_{i(y)}(X)$ – инъективно.

8. Найдите алгебры Ли групп диагональных (D_n), верхнетреугольных (T_n), унипотнентных верхнетреугольных (U_n) матриц.

9. Найдите алгебры Ли групп $SO(n)$ и $Sp(2n)$.

10. Пусть $G = SL_2(\Bbbk)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Пусть $x \in G$. Вычислите матрицу отображения $\operatorname{Ad} x$ в базисе $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

11. Приведите пример алгебраической группы G, такой что $\operatorname{Ker} \operatorname{Ad} \neq Z(G)$. Докажите, что в случае $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ имеет место равенство.

12. Приведите пример алгебраической группы G и замкнутой подгруппы H, такой что алгебра Ли $N_G(H)$ не совпадает с $n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$. Здесь $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли G, $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли H. Докажите, что в случае $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ имеет место равенство.

13. Пусть G — алгебраическая группа и H – замкнутая подгруппа. Пусть $C = C_G(H)$, $\mathfrak{c}$ – алгебра Ли $\mathfrak{c}$. Докажите, что $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [x, \mathfrak{h}] = 0\}$. Здесь $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли G, $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли H. Докажите, что в случае $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ имеет место равенство.