Линейные алгебраические группы.

Пусть $\Bbbk = \bar{\Bbbk}$ — поле.

Опр. *Линейной алгебраической группой называется группа G, которая*
1) Является аффинным алгебраическим многообразием;
2) Отображения умножения $m : G \times G \to G$ и $i : G \to G$ являются морфизмами алгебраических многообразий.

1. Пусть A – конечномерная алгебра. Докажите, что AutA, группа автоморфизмов алгебры A – замкнутая подгруппа $GL(A)$.

2. Найдите группы автоморфизмов G_a и G_m и докажите, что эти группы не изоморфны.

3. Докажите, что связная компонента алгебраической группы G является характеристической (то есть инвариантной относительно автоморфизмов) подгруппой группы G.

4. Пусть G – связная алгебраическая группа. Докажите, что любая конечная нормальная подгруппа лежит в центре группы G.

5. Докажите, что $SL_n(\Bbbk), D(n, \Bbbk), T(\Bbbk), U(\Bbbk)$ – связные группы.

6. Цель этой задачи – доказать связность $SO(n)$ при $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.
а) Группа $O(n)$ не связна.
б) Пусть $W \subset SO(n) = \{g \in SO(n) \mid \det(g+E) \neq 0\}$, Skew_n – множество кососимметрических матриц $n \times n$. Рассмотрим преобразование Кэли:

$$\psi : W \to \mathrm{Skew}_n, g \to (g+E)^{-1}(g-E).$$

Докажите, что $\psi(W)$ — открытое подмножество Skew_n. Выведите отсюда, что W – связно, следовательно, $W \subset SO(n)^0$.
г) Докажите, что любой элемент $SO(n) \setminus W$ так же лежит в $SO(n)^0$, таким образом группа $SO(n)$ – связна.

7. Аналогично задаче 6, докажите, что $Sp(2n)$ связна.

8. Другой способ, доказать связность $SO(n), Sp(2n)$ – это найти подходящее множество образующих этих групп. А именно, для любого $v \in V, (v, v) \neq 0$ определим отражение

$$\sigma_v : x \to x - \frac{2(x, v)}{(v, v)}.$$

Здесь $(\cdot\,,\cdot)$ – билинейная форма из определения $SO(n)$. Докажите, что при $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ отражения являются образующими группы $SO(n)$. Выведите из этого связность $SO(n)$. Для $Sp(2n)$ определим симплектические трансвекции по $v \in V$ и $c \in \Bbbk$:

$$\tau_{v,c} : x \to x + c(x, v)v.$$

Здесь $(\cdot\,,\cdot)$ – билинейная форма из определения $SO(n)$. Докажите, что симплектические трансвекции являются образующими группы $Sp(2n)$. Выведите из этого связность $Sp(2n)$.

Опр. *Алгебра Хопфа — это четверка $(A, \Delta, \varepsilon, S)$, где A – ассоциативная алгебра с 1, $\Delta : A \otimes A \to A, \varepsilon : A \to \Bbbk$ — гомоморфизмы алгебр, $S : A \to A$ – антигомоморфизм. При этом выполнены следующие свойства:*

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta (\textit{коассоциативность}), \tag{1}$$

$$(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes 1) \circ \Delta \ (\textit{здесь } U \simeq U \otimes k \textit{ посредством } u \to u \otimes 1), \tag{2}$$

$$m \circ (1 \otimes S) \circ \Delta = i \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes 1) \circ \Delta. \tag{3}$$

(здесь $m : U \otimes U \to U,\ u \otimes u' \to uu'$ − умножение; $i : k \to U,\ a \to a1$ − единица).

8. Нарисуйте соответствующие коммутативные диаграммы. Убедитесь, что алгебра регулярных функций на группе имеет каноническую структуру алгебры Хопфа. Найдите формулы коумножения, коединицы и антипода для $G_a, G_m, GL_n(\Bbbk)$.

Замечание. *Для любой группы соответствующая групповая алгебра является конечнопорождённой коммутативной алгеброй Хопфа. Если* $\operatorname{char}\Bbbk = 0$*, то верно и обратное:*
Любая коммутативная конечнопорождённая алгебра Хопфа изоморфна $\Bbbk[G]$ *для некоторой алгебраической группы* G.

9. Докажите, что $\Bbbk[G]$ — объединение конечномерных подпространств, инвариантных относительно правых(левых) сдвигов на элементы $g \in G$.

10. Пусть $GL(V)$ действует на себе сопряжением. Какие классы сопряженности являются замкнутыми, а какие – нет?

11. Рассмотрим $G = SL_2(\Bbbk)$ и элемент $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что централизатор $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ – не связен.

12. Докажите, что нормализатор $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$ – замкнутая подгруппа G. Найдите нормализатор группы диагональных матриц в GL_n. Связен ли он?