Аффинная алгебраическая геометрия.

Пусть $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ — поле. Пусть $\mathbb{A}^n = \mathbb{k}^n$ – множество.

Опр. *Пусть I – идеал в кольце $\mathbb{k}[T] = \mathbb{k}[t_1, \dots, t_n]$. Аффинное алгебраическое многообразие – это множество $X := V(I) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \,\forall f \in I\}$.*

Опр. *Алгеброй полиномиальных функций на многообразии X называется алгебра $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[T]/I(X)$. Здесь $I(X) = \{f \in \mathbb{k}[T], \mid f(x) = 0 \,\forall x \in X\}$.*

Опр. *Пусть $X \subset A^m, Y \subset A^n$ – аффинные многообразия. Морфизмом $f : X \to Y$ называется отображение вида $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, где $\varphi_k \in \mathbb{k}[X]$.*

1. а) $\mathbb{k}[X]$ — конечнопорождённая приведённая (без нильпотентных элементов) алгебра.
б) Любая приведённая конечнопорождённая алгебра является алгеброй функций на некотором аффинном алгебраическом многообразии.
в) Пусть X и Y — аффинные алгебраические многообразия, $f : X \to Y$ — морфизм. Определим коморфизм следующим образом

$$f^* : \mathbb{k}[Y] \to \mathbb{k}[X], \varphi \to \varphi \circ f.$$

Докажите, что $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$ – биективное отображение. Здесь $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество морфизмов многообразий $X \mapsto Y$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$ – множество морфизмов алгебр $\mathbb{k}[Y] \mapsto \mathbb{k}[X]$.

Опр. *Топологией Зарисского на $\mathbb{A}^n$ называется топология, в которой систему замкнутых множеств составляют аффинные многообразия. В свою очередь, снабдим каждое замкнутое подмножество $\mathbb{A}^n$ индуцированной топологией.*

2. Проверьте, что топология Зарисского действительно топология.
3. Докажите, что топология Зарисского обладает следующими свойствами:
1) Все точки замкнуты (T_1).
2) Любое семейство замкнутых подмножеств содержит минимальный элемент ($\mathbb{A}^n$ — нётерово пространство).
3) Множества $D_f = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) \neq 0\}, f \in \mathbb{k}[T]$ образуют базу топологии (главные открытые множества).
4) $\mathbb{A}^n$ — (квази)компактно.
5) Всё сказанное выше верно для любого аффинного многообразия X, $D_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}, f \in \mathbb{k}[X]$.
4. Любой морфизм аффинных многообразий непрерывен в топологии Зарисского. Обратное не верно (некоторый морфизм $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$).

Опр. *Топологическое пространство X называется неприводимым, если выполнено одно из трёх эквивалентных условий:*
1) Если $X = A \cup B$, где A, B – замкнуты, то либо $A = X$, либо $B = X$.
2) Любые два открытых множества пересекаются.
3) Любое открытое множество плотно в X.

5. Докажите эквивалентность определений неприводимого пространства.
6. Докажите, что нётерово топологическое пространство имеет конечное число максимальных неприводимых подмножеств $X_1, \dots, X_n$, причём $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$.
7. а) Докажите, что подпространство $Y \subset X$ неприводимо, тогда и только тогда когда неприводимо замыкание $\bar{Y}$.
б) Докажите, что при непрерывном отображении образ неприводимого пространства неприводим.
8. Докажите, что аффинное многообразие X неприводимо, тогда и только тогда, когда $\mathbb{k}[X]$ – область целостности. Убедитесь, что $\mathbb{A}^n$ неприводимо. Приведите пример связного приводимого многообразия.

Опр. *Произведением аффинных многообразий* $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ *называется множество* $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$.

9. а) Убедитесь, что $X \times Y$ действительно аффинное многообразие.
б) Убедитесь, что индуцированная с $\mathbb{A}^{n+m}$ топология не совпадает с топологией произведения.
в) Докажите, что если X, Y – неприводимы, то $X \times Y$ – тоже неприводимо.
г) Докажите, что $\Bbbk[X \times Y] \simeq \Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[Y]$.
10. а) Проверьте, что отображения $x \leftrightarrow [\mathrm{ev}_x : \Bbbk[X] \to \Bbbk(f \to f(x))] \leftrightarrow \ker \mathrm{ev}_x$ являются биекциями между множеством точек многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$ и множеством максимальных идеалов $\Bbbk[X]$.
б) Пусть $Y = D(f)$, $f \in \Bbbk[X]$ – главное открытое подмножество неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$. Определим алгебру $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f}] \subset \Bbbk(X)$. Убедитесь, что R — приведённая алгебра.
в) Пусть $Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — соответствующее R алгебраическое многообразие. Постройте гомеоморфизм между Y и Z. Таким образом, Y является аффинным алгебраическим многообразием.

Опр. *Пусть* $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ *— неприводимое аффинное многообразие. Размерность* X *– это* $\dim X := \operatorname{tr}\deg \Bbbk(X)$. *Если* $X = X_1 \cup \ldots X_n$ *– приводимо, то* $\dim X = \max_i \dim X_i$.

11. Пусть X и Y – неприводимые аффинные многообразия. Докажите, что $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.
12. Пусть X – неприводимо и Y — его собственное замкнутое подмножество. Тогда $\dim Y < \dim X$.

Опр. *Пусть* X *– топологическое пространство. Локально-замкнутым подмножеством будем называть пересечение открытого и замкнутого множеств. Подмножество* $Y \subset X$ *называется конструктивным, если оно является конечным объединением локально замкнутых множеств.*

13. Докажите, что конструктивные множества образуют наименьшую совокупность множеств, содержащую открытые и замкнутые множества и замкнутую относительно пересечений, объединений и дополнения.
14. Пусть X – нётерово топологическое пространство. Докажите, что конструктивное подмножество содержит открытое плотное подмножество своего замыкания.
15*. Пусть $\varphi : X \to Y$ – морфизм аффинных алгебраических многообразий. Докажите, что образ содержит плотное подмножество своего замыкания.
16. Докажите, что образ конструктивного множества при морфизме аффинных алгебраических многообразий конструктивен.