3. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. а) Пусть $V = \mathbb{R}^{n+1}$ с координатами $x_0, \dots, x_n$, а W — гиперплоскость $x_0 = 0$. Опишите явно нормализатор гиперплоскости W в группе проективных преобразований $\mathbb{R}P^n$ и постройте явный изоморфизм его с аффинной группой $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. б) Докажите, что нормализатор точки в группе проективных преобразований V также изоморфен группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. в) Опишите явно нормализатор проективной прямой в группе проективных преобразований трехмерного проективного пространства. г*) Тот же вопрос для нормализатора проективного подпространства произвольной размерности в группе проективных преобразований пространства произвольной размерности.

Задача 2. Сколько а) точек, б) проективных прямых, в) проективных подпространств размерности k содержит проективное пространство размерности n над конечным полем $\mathbb{F}$ из q элементов. Найдите также пределы полученных выражений при $q \to 1$.

Задача 3. а) Докажите теорему Паппа: если точки a, b, c лежат на одной прямой, а точки a', b', c' — на другой прямой, то точки $x = ab' \cap a'b$, $y = bc' \cap b'c$ и $z = ac' \cap a'c$ также лежат на одной прямой. б) Докажите вырожденную теорему Брианшона: если прямые ab, cd и ef пересекаются в одной точке p, а прямые bc, de и fa — в другой точке q, то прямые ad, be и cf также пересекаются в одной точке.

Задача 4. а) Пусть $p, q, r \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ — три попарно различные точки. Найдите проективное (т.е. дробно-линейное) преобразование f, переводящее их в точки 0, 1 и ∞ соответственно. Величина $f(s) \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ называется двойным отношением точек p, q, r, s и обозначается $[p, q, r, s]$. б) Докажите, что преобразование $f : \mathbb{F} \cup \{\infty\} \to \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ дробно-линейное тогда и только тогда, когда оно сохраняет двойное отношение: $[p, q, r, s] = [f(p), f(q), f(r), f(s)]$.

Задача 5. а) Пусть σ — перестановка чисел $1, 2, 3, 4$ (т.е. взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, 3, 4\}$ в себя), и пусть $[a_1, a_2, a_3, a_4] = x$. Докажите, что величина $A_\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}]$ зависит только от x и σ. Чему может быть равно $A_\sigma(x)$? б) Докажите, что соответствие $\sigma \mapsto A_\sigma$ представляет собой гомоморфизм группы S_4 в группу дробно-линейных преобразований прямой. Найдите ядро и образ этого гомоморфизма.

Задача 6. а) Докажите, что двойное отношение точек $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ вещественно тогда и только тогда, когда точки лежат на одной прямой или окружности. б) Докажите, что дробно-линейное преобразование $\mathbb{C}$ переводит прямые и окружности в прямые и окружности (но может переводить прямые в окружности и наоборот). в) Докажите, что отображение $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ в себя, переводящее прямые и окружности в прямые и окружности, является либо дробно-линейным, либо композицией дробно-линейного и комплексного сопряжения.

Точка $x_* \in \mathbb{R}$ называется средним гармоническим точек $x_1, \dots, x_n$ относительно начала отсчета a, если $\frac{n}{x_* - a} = \frac{1}{x_1 - a} + \dots + \frac{1}{x_n - a}$.

Задача 7. а) Докажите, что точка x_* является средним гармоническим точек $x_1, \dots, x_n$ относительно начала отсчета a тогда и только тогда, когда для любого t выполнено равенство $[x_1, x_*, t, a] + \dots + [x_n, x_*, t, a] = n$. б) Докажите теорему Коутса: пусть прямая, вращающаяся вокруг начала координат, пересекает плоскую кривую степени n в n точках $x_1, \dots, x_n$. Тогда среднее гармоническое точек $x_1, \dots, x_n$ относительно начала координат движется по некоторой прямой (считается, что начало координат не лежит на кривой). Кривой степени n называется множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$, где P — многочлен степени n.

Задача 8. Пусть p и q — точки на плоскости. Докажите, что не существует способа построить середину отрезка pq, пользуясь только линейкой без делений.

Указание. Существует проективное преобразование плоскости (и даже прямой), переводящее отрезок pq в себя, но не переводящее середину его в себя. Чтобы вывести из этого утверждения невозможность построения середины одной линейкой, дайте точное определение — что понимается под построением. Не забудьте, что построение может включать операции типа "возьмем произвольную вспомогательную точку на плоскости и соединим ее прямой с точкой p" (разумеется, окончательный результат не должен зависеть от выбора вспомогательных точек).

Проективной гиперплоскостью, двойственной к точке $a = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{F}P^n$, называется множество $a^\vee$ точек с однородными координатами $[y_0 : \dots : y_n]$, удовлетворяющими равенству $x_0 y_0 + \dots + x_n y_n = 0$. Подпространством $W^\vee$, двойственным к проективному подпространству W, называется пересечение гиперплоскостей $a^\vee$, двойственных ко всем точкам $a \in W$.

Задача 9. Какие утверждения получится, если заменить в теоремах Дезарга (см. лекции) и Паппа все точки и прямые двойственными объектами (соответственно, прямыми и точками, т.к. утверждения относятся к плоскости)?

Задача 10. а) Докажите, что подпространство, двойственное к подпространству размерности k, имеет размерность $n-1-k$. б) Докажите, что $(W_1 \cap W_2)\check{}$ — наименьшее по включению проективное подпространство, содержащее $W_1\check{}$ и $W_2\check{}$. Что означает это утверждение, если W_1 и W_2 — гиперплоскости? в) Докажите, что $(W\check{})\check{} = W$. г) Пусть A — проективное преобразование, переводящее точку p в точку q. Обязательно ли A переводит гиперплоскость $p\check{}$ в $q\check{}$?