ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Метрика Лобачевского в стандартных моделях. Площадь, дефект и кривизна.

Вычислим теперь расстояние ϱ между точками на плоскости Лобачевского явно.

Теорема 1. *Пусть $z, w \in H$ — точки верхней полуплоскости. Тогда*

1) *Расстояние $\varrho(z,w)$ между ними равно $k\ln[p,q,w,z]$, где p,q — точки пересечения прямой (zw) с абсолютом (p — со стороны z, q — со стороны w).*
2) *Расстояние $\varrho(z,w)$ равно $k\operatorname{Arch}(1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w})$, где $\operatorname{Arch}(t) \stackrel{def}{=} \ln(t+\sqrt{t^2-1})$ — функция, обратная гиперболическому косинусу.*

Доказательство. Пусть сначала $z = iy_1, w = iy_2$ и, для определенности, $y_2 > y_1$. Тогда $\varrho(z,w) = \int_{y_1}^{y_2} k\frac{dy}{y} = k\ln\frac{y_2}{y_1}$. Прямая (zw) пересекает абсолют в точках $p = 0$ и $q = \infty$, так что $y_2/y_1 = [0,\infty,w,z]$. С другой стороны, для произвольных точек $z,w \in H$ существует аффинное преобразование I рода (т.е. дробно-линейное преобразование), переводящее их в точки вида iy_1 и iy_2. Поскольку двойное отношение сохраняется при дробно-линейных преобразованиях, получается формула пункта 1.

Для доказательства пункта 2 заметим, что величина $\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$ инвариантна при аффинных преобразованиях $f_{1,b}(z) = z+b$ ($b\in\mathbb{R}$), $f_{2,a}(z) = az$ ($a > 0$), $f_3(z) = -\bar z$ и $f_4(z) = 1/\bar z$. Для f_1, f_2 и f_3 это очевидно; для f_4 имеем $\frac{|1/\bar z-1/\bar w|^2}{2\operatorname{Im}(1/\bar z)\operatorname{Im}(1/\bar w)} = \frac{|z-w|^2\cdot|z|^2|w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w\cdot|z|^2|w|^2} = \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$. Заметим теперь, что всякое аффинное преобразование представляется в виде композиции преобразований $f_1,\dots,f_4$. Действительно, если $f = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc > 0$, то можно считать без ограничения общности, что $c > 0$ (случай $c = 0$ — упражнение). Тогда $f = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c}f_4(f_3(cz+d)) = f_{1,a/c}\circ f_{2,(ad-bc)/c}\circ f_4\circ f_3\circ f_{1,d}\circ f_{2,c}(z)$. Случай $f = \frac{a\bar z+b}{c\bar z+d}$ разбирается аналогично. Следовательно, величина $\operatorname{Arch}(1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w})$ инвариантна при всех аффинных преобразованиях. С другой стороны, если $z = iy_1$, $w = iy_2$ — точки мнимой оси, и $y_2 > y_1$, то $\operatorname{Arch}(1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}) = \operatorname{Arch}\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2} = \ln\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2}+\sqrt{\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2}\right)^2-1}\right) = \ln\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{2y_1y_2}\right) = \ln\frac{y_2}{y_1}$. Таким образом, для точек мнимой оси формула пункта 2 дает расстояние Лобачевского. Далее рассуждаем, как в предыдущем пункте: аффинным преобразованием можно любые две точки поместить на мнимую ось. $\square$

Рассмотрим теперь метрику Лобачевского в модели Пуанкаре в круге Ω. По определению, $\varrho_\Omega(a,b) = \varrho_H(f_{\Omega H}(a), f_{\Omega H}(b))$, где $f_{\Omega H}:\Omega\to H$ — эквивалентность моделей Пуанкаре в круге и в полуплоскости.

Как известно, эквивалентность $f_{\Omega H}$ моделей Пуанкаре в круге и в полуплоскости — дробно-линейное преобразование $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Оно сохраняет двойное отношение, поэтому $\varrho_\Omega(z,w) = k\ln[p,q,w,z]$, где p,q — точки пересечения прямой Лобачевского (zw) с абсолютом (границей круга Ω). Пусть теперь $z,w\in\Omega$ — близкие точки, $w - z = v$. Тогда $\varrho_\Omega(z,w) = \varrho_H(f_{\Omega H}(z), f_{\Omega H}(z+v)) = \varphi(f_{\Omega H}(z))\,|f'_{\Omega H}(z)|\,|v| + o(|v|)$, $v\to 0$. Поскольку $f_{\Omega H}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$, имеем $\varphi(f_{\Omega H}(z)) = \frac{k}{\operatorname{Im}(i(1+z)/(1-z))} = \frac{2k}{\frac{1+z}{1-z}+\frac{1+\bar z}{1-\bar z}} = \frac{k|1-z|^2}{1-|z|^2}$. Также: $f'_{\Omega H}(z) = \frac{2i}{(1-z)^2}$, откуда $\varrho_\Omega(z,w) = \frac{2k}{1-|z|^2}|v| + o(|v|)$ при $v\to 0$. Тем самым метрику в модели Пуанкаре в круге можно задать по той же схеме, что и в модели в полуплоскости, при этом нужно использовать функцию $\varphi(z) = \frac{2k}{1-|z|^2}$.

Метрика Лобачевского в моделях Клейна в этом курсе не рассматривается из-за нехватки времени.

Пусть γ_1, γ_2 — кривые на плоскости, пересекающиеся в точке $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ и гладкие в точках t_1, t_2. (Напомним, что кривая $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ называется гладкой в точке t, если вектор $\gamma'(t)\neq 0$. Прямая, проведенная через точку $\gamma(t)$ в направлении вектора $\gamma'(t)$, называется касательной к кривой γ.) Углом между кривыми называется угол (обычный) между их касательными в точке z, то есть угол между векторами (ненулевыми!) $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$.

Теорема 2. *Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — отображение, которое в некоторой окрестности U точки z имеет непрерывную производную, не обращающуюся в нуль. Тогда кривые $\Gamma_1 \stackrel{def}{=} f\circ\gamma_1$ и $\Gamma_2 \stackrel{def}{=} f\circ\gamma_2$ — гладкие в точках t_1, t_2, и угол между ними равен углу между кривыми γ_1, γ_2.*

Доказательство. Имеем $\Gamma_1'(t_1) = f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) = f(z)\gamma_1'(t_1)$, и, аналогично, $\Gamma_2'(t_2) = f'(z)\gamma_2'(t_2)$. Тем самым комплексные числа $\Gamma_1'(t_1)$, $\Gamma_2'(t_2)$ получаются из комплексных чисел $\gamma_1'(t_1)$, $\gamma_2'(t_2)$ умножением на одно и то же комплексное число $f'(z)\neq 0$. Умножение на ненулевое комплексное число это композиция поворота и растяжения, то есть преобразование, сохраняющее углы между векторами. $\square$

Следствие 1. *Аффинные преобразования модели Пуанкаре в полуплоскости сохраняют углы между кривыми (при условии, что не переводят точку пересечения в бесконечность).*

Доказательство. Достаточно разобрать случай, когда аффинное преобразование f — дробно-линейное. Если $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}$, то $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$. □

Площадью фигуры $M \subset H$ на плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости) называется величина $S(M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M k^2/y^2\, dxdy$.

Пусть $A = (p, q) \in H$, и Δ_A — "полуидеальный" треугольник с вершинами 0, ∞ и A; его стороны — ось ординат $\ell_{0\infty} = \{(0, y) \mid y > 0\}$, вертикальный луч $\ell_{A\infty} = \{(p, y) \mid y \geq q\}$ и дуга окружности ℓ_{0A} с центром на абсолюте, проходящая через точки 0 и A.

Лемма 1. *Площадь треугольника Δ_A равна $k^2(\pi - \varphi)$, где φ — угол между прямыми Лобачевского ℓ_{0A} и $\ell_{A\infty}$ в точке A.*

Доказательство леммы — прямое вычисление.

Теорема 3. *Площадь треугольника ABC равна $k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$, где α, β и γ — углы между сторонами треугольника, пересекающимися в его вершинах A, B и C соответственно.*

Доказательство теоремы — упражнение.

Указание. Для доказательства заметим, что площадь фигуры не меняется при параллельных переносах на векторы, параллельные оси абсцисс. Это позволяет легко доказать (с использованием леммы 1) теорему в случае, когда одна вершина треугольника — точка ∞ на абсолюте, а две оставшихся — произвольные точки $A, B \in H$. Затем отсюда выводится утверждение теоремы в полной общности.

Следствие 2. *Площадь "идеального" треугольника (все три вершины которого лежат на абсолюте) равна πk^2 (и от вершин не зависит).*

Следствие 3. *Площадь треугольника не меняется при аффинных преобразованиях.*

Следствие 4 (следствия 3)**.** *Площадь произвольной фигуры (имеющей площадь) не меняется при аффинных преобразованиях.*