# ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Проективные квадрики: общие теоремы и классификация над полем $\mathbb{C}$.

Билинейной формой на векторном пространстве $V$ над полем $\mathbb{F}$ называется отображение $B : V \times V \to \mathbb{F}$, линейное по каждому из аргументов (при фиксированном втором аргументе). Форма называется симметрической, если $B(u, v) = B(v, u)$ для всех $u, v \in V$. Если $B$ — симметрическая билинейная форма, то функция $Q : V \to \mathbb{F}$, равная $Q(v) \stackrel{\text{def}}{=} B(v, v)$, называется квадратичной формой.

Из билинейности и симметричности $B$ вытекает, что $Q(u + v) = B(u + v, u + v) = B(u, u) + B(v, v) + 2B(u, v) = Q(u) + Q(v) + 2B(u, v)$. Если характеристика поля $\mathbb{F}$ равна 2 (т.е. в этом поле $2 = 0$), то $Q$ тем самым является аддитивной функцией (но не обязательно линейной!); этот случай мы почти не будем рассматривать. В противном случае поле $\mathbb{F}$ содержит элемент $1/2$, обратный к $2 \neq 0$, и билинейную форму можно выразить через квадратичную: $B(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v))$ ($B$ называется поляризацией $Q$).

В дальнейшем $V$ — пространство конечной размерности $n$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики, не равной 2, $B$ — симметрическая билинейная форма на нем, $Q$ — соответствующая квадратичная форма. Квадратичные (и билинейные тоже) формы на пространстве $V$ сами образуют векторное пространство, обозначаемое $\mathbf{Q}(V)$.

Ксли $A : V_1 \to V_2$ — линейное отображение, то ему можно сопоставить линейное отображение $\mu_A : V_1 \to V_2$, действующее по формуле $(\mu_A(Q))(v) = Q(Av)$. Очевидно, если $C : V_2 \to V_3$ — другое линейное отображение, то$\mu_{AC} = \mu_A \circ \mu_C$. (На языке абстрактной алгебры это выражается так: существует функтор из категории векторных пространств в нее же, сопоставляющий каждому векторному пространству $V$ пространство $\mathbf{Q}(V)$, а линейному отображению $A$ — отображение $\mu_A$.) В частности, если $A$ — изоморфим (обратимое линейное отображение; оно существует только между пространствами одной размерности), то и $\mu_A$ — изоморфизм; соответствующие формы называются изоморфными.

**Теорема 1.** *Для любого $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики, не равной 2 и любой формы $Q \in \mathbf{Q}(V)$ существует число $k$, $0 \le k \le n$ и числа $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ такие, что форма $Q$ эквивалентна форме $S_{q_1,\dots,q_k}$ на пространстве $\mathbb{F}^n$, заданной формулой $S_{q_1,\dots,q_k}(x_1, \dots, x_n) = q_1x_1^2 + \dots + q_kx_k^2$. Число $k$ однозначно определяется формой $Q$.*

Пусть $A : \mathbb{F}^n \to V$ — обраттимое линейное отображение, осуществляющее эквивалентность в теореме 1, и пусть $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}^n$ — стандартный базис ($f_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 на $i$-м месте), то $e_1 = Af_1, \dots, e_n = Af_n$ — базис в $V$. Обратно, этот базис полностью определяет обратимое отображение $A$. Отсюда вытекает, что теорему 1 можно переформулировать так:

**Теорема 1'.** *Для любой квадратичной формы в пространстве $V$ имеется базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что если $v = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, то $Q(v) = q_1x_1^2 + \dots + q_kx_k^2$, где $q_1, \dots, q_k \neq 0$. Число $k \le n$ не зависит от выбора базиса (и называется рангом квадратичной формы).*

*Доказательство.* Докажем индукцией по $n$, что для симметрической билинейной формы $B$ существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что $B(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ (он называется ортогональным относительно $B$).

Если $B \equiv 0$, то подходит любой базис. В противном случае существует вектор $e_1 \in V$, для которого $Q(e_1) \neq 0$ — иначе $B \equiv 0$ по формуле поляризации.

Соответствие $v \mapsto B(v, e_1)$ является линейной функцией (по определению билинейной формы), не равной тождественно нулю, так что множество нулей этой функции $e_1^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid B(v, e_1) = 0\}$ — линейное подпространство в $V$ размерности $n - 1$, не содержащее вектора $e_1$. По предположению индукции, в $e_1^\perp$ существует базис $e_2, \dots, e_n$, ортогональный относительно $B$. Тогда система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является базисом в $V$ (поскольку $e_1 \notin e_1^\perp$), ортогональным относительно $B$.

Если теперь $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, то $Q(v) = B(v, v) = \sum_{i,j=1}^n B(e_i, e_j)x_ix_j = \sum_{i=1}^n Q(e_i)x_i^2$, причем по построению (мы выбираем $e_1$ такой, что $Q(e_1) \neq 0$, если только $Q$ и $B$ не равны тождественно нулю) существует такое $k \le n$, что $Q(e_j) \neq 0$ при $1 \le j \le k$ и $Q(e_j) = 0$ при $k + 1 \le j \le n$.

Назовем ядром формы $B$ подпространство $\operatorname{Ker} B$, состоящее из тех $v \in V$, что $B(u, v) = 0$ для всех $u \in V$. Очевидно, $e_{k+1}, \dots, e_n \in \operatorname{Ker} B$. Если $\operatorname{Ker} B$ содержит вектор вида $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, где $x_i \neq 0$ хотя бы для какого-то $i \le k$, то $B(v, e_i) = x_iQ(e_i) \neq 0$ вопреки тому, что $v \in \operatorname{Ker} B$. Следовательно, $\operatorname{Ker} B$ — подпространство, порожденное $e_{k+1}, \dots, e_n$, и $k = n - \dim \operatorname{Ker} B$ от базиса не зависит. □

Очевидно, что $Q(\lambda v) = \lambda^2Q(v)$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Поэтому если $Q(v) = 0$, то $Q(\lambda v) = 0$. Тем самым можно рассмотреть множество $P_Q \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{P}V \mid Q(v) = 0 \,\forall v \in p\} \subset \mathbb{P}V$; оно называется проективной квадрикой, а при $\dim V = 3$ — коникой (от "конического сечения"). Если $A : V \to V$ — обратимый оператор, $p \in P_Q$ и $v \in p$, то $\mu_A(Q)(A^{-1}v) = Q(v) = 0$, то есть $(\mathbb{P}A^{-1}(p) \in P_{\mu_A(Q)}$. Иными словами, проективное преобразование $\mathbb{P}A$ отображает (взаимно однозначно) квадрику $P_{\mu_A(Q)}$ на $P_Q$; такие квадрики называются проективно эквивалентными. Поскольку проективные преобразования образуют группу, это действительно отношение эквивалентности.

Рассмотрим орбиты действия группы $\mathrm{GL}(V)$ на квадратичных формах и группы $\mathrm{PGL}(V)$ на проективных квадриках в случае, когда поле $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. (Это обычно называют задачей проективной классификации квадрик.)

*Замечание.* Задача классификации квадратичных форм и квадрик сильно зависит от свойств поля $\mathbb{F}$ и не имеет общего ответа "для всех полей"; она достаточно сложна уже при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. В этом курсе мы ограничимся случаями $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

**Теорема 2.** *Две проективные квадрики над в пространстве $\mathbb{C}P^n$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие квадратичные формы в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ имеют один и тот же ранг.*

*Доказательство.* Пусть формы $Q_1$, $Q_2$ на пространстве $V$ имеют ранг $k$. Согласно теореме 1, они эквивалентны формам $S_{q_1,\dots,Q_k}$ и $S_{q'_1,\dots,q'_k}$ на пространстве $\mathbb{F}^n$. Определим оператор $C : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ формулой $C(x_1, \dots, x_n) = (x_1\sqrt{q_1/q'_1}, \dots, x_n\sqrt{q_n/q'_n})$. Очевидно, $\mu_C(S_{q'_1,\dots,q'_k}) = S_{q_1,\dots,q_k}$, то есть формы $S_{q_1,\dots,q_k}$ и $S_{q'_1,\dots,q'_k}$ эквивалентны. Следовательно, $Q_1$ и $Q_2$ также эквивалентны. Отсюда вытекает, что квадрики $P_{Q_1}$ и $P_{Q_2}$ проективно эквивалентны.

Для доказательства обратного утверждения нам потребуется

**Лемма 1.** *Любая прямая в $\mathbb{F}P^n$ либо целиком лежит в квадрике $P_Q$, либо имеет с нею не более двух общих точек. Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то хотя бы одна общая точка существует.*

*Доказательство леммы.* Прямая, проведенная через несовпадающие точки $a \stackrel{\text{def}}{=} [a_0 : \dots : a_n]$, $b \stackrel{\text{def}}{=} [b_0 : \dots : b_n] \in \mathbb{F}P^n$, это $\{ta+sb \stackrel{\text{def}}{=} [a_0t+b_0s : \dots : a_nt+b_ns] \mid (t,s) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$. Точка $ta+sb \in P_Q$, если $Q(ta+sb) = 0$, то есть $t^2Q(a) + 2tsB(a,b) + s^2Q(b) = 0$, где $B$ — поляризация $Q$. Далее возможны следующие случаи:

1) $Q(a) \neq 0$. Тогда $a \notin P_Q$, и $(t,0)$ не является решением уравнения. Тогда уравнение можно привести к виду $Q(a)(t/s)^2 + 2B(a,b)(t/s) + Q(b) = 0$. Степень уравнения равна 2, так что оно имеет не более 2 корней. То же самое — если $Q(b) \neq 0$.
2) $Q(a) = Q(b) = 0$, но $B(a,b) \neq 0$. Тогда уравнение имеет вид $2B(a,b)ts = 0$ и имеет 2 решения с точностью до пропорциональности: $(1,0)$ и $(0,1)$. Тем самым прямая имеет две точки пересечения с квадрикой, и это $a$ и $b$.
3) $Q(a) = Q(b) = B(a,b) = 0$. Тогда прямая целиком лежит в квадрике.

Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то квадратное уравнение в случае 1 обязательно имеет корень, так что прямая пересекается с квадрикой. В остальных случаях пересечение имеется при любом $\mathbb{F}$. Заметим также, что если квадратное уравнение в случае 1 имеет единственный корень, то этот корень двукратный. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть квадрики $P_{Q_1}$ и $P_Q$ проективно эквивалентны: $P_Q = (\mathbb{P}A)(P_{Q_1})$, где $A : V \to V$ — обратимое линейное отображение. Обозначим $Q_2(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_A(Q)$; тогда $Q_2$ — квадратичная форма того же ранга, что и $Q$ (почему?), и квадрики $P_{Q_1}$ и $P_{Q_2}$ совпадают. Докажем, что квадратичные формы пропорциональны: $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : Q_1(v) = \lambda Q_2(v)$ для всех $v \in V$. Для этого рассмотрим квадратичную форму $R = Q_1 - tQ_2$ для всех $t \in \mathbb{C}$, и пусть точка $a$ не лежит на квадрике: $Q_1(a), Q_2(a) \neq 0$. Тогда $R(a) = Q_1(a) - \lambda Q_2(a) = 0$ при $\lambda = Q_1(a)/Q_2(a) \neq 0$.

Проведем прямую $\ell$ через точку $a$ и произвольную точку $b \in \mathbb{C}P^n$; согласно лемме 1, она пересекает квадрику в одной или двух точках. Тогда ограничение $R$ на $\ell$ — квадратичный многочлен, имеющий нули в точках пересечения $\ell$ с квадрикой; при этом если эта точка пересечения единственная, то нуль кратный. Но это ограничение также имеет нуль в точке $a$, не лежащей на квадрике — следовательно, ограничение тождественно равно нулю. Тем самым доказано, что прямая $\ell$ целиком лежит на квадрике $P_R$, откуда $R(b) = 0$, то есть $Q_1(b) = \lambda Q_2(b)$. Поскольку точка $b$ произвольная, формы $Q_1$ и $Q_2$ пропорциональны. Над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ пропорциональные формы эквивалентны: $Q_1(b) = Q_2(b\sqrt{\lambda})$ и, следовательно, имеютт одинаковый ранг. □

*Пример* 1. Квадрика ранга 2 в $\mathbb{C}P^n$ это пара несовпадающих гиперплоскостей: $x_0^2 + x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm ix_0$; в частности, коника ранга 2 это пара различных прямых. Квадрика ранга 1 это гиперплоскость (над любым полем): $x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$; обычно говорят "две совпадающих гиперплоскости".

*Пример* 2. Коника $P \subset \mathbb{C}P^2$ ранга 3 задается уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Проведем прямую через точку $a \in P$ и произвольную точку $b \in \mathbb{C}P^2$. Тогда квадратное уравнение из доказательства леммы 1 имеет вид $2B(a,b)ts + Q(b)s^2 = 0$ и имеет корень $s = 0$ (соответствующий точке пересечения $a$. Если $B(a,b) = 0$, то этот корень единственный (и двукратный), поскольку коника ранга 3 не содержит ни одной прямой (докажите!) и равенство $Q(b) = 0$ невозможно. В этом случае прямая $\ell$ называется касательной к квадрике. Уравнение

$B(a,b)=0$ при фиксированном $a$ линейно по $b$ и, следовательно, задает прямую на $\mathbb{C}P^2$. Отсюда вытекает, что касательная к конике ранга 3 в данной точке $a$ единственна.

Если $B(a,b)\neq 0$, то уравнение имеет два простых корня, и прямая тем самым пересекает конику в двух точках (одна из которых $a$). Следовательно, построено взаимно однозначное соответствие между точками коники ранга 3 и проективными прямыми, проходящими через точку $a$ (при этом сама точка $a$ соответствует касательной) — то есть, точки коники находятся во взаимно однозначном соответствии с точками прямой $a^{\check{}}$ на двойственной проективной плоскости.