НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3. Поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. 22.02.2019.

Задача 1. Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\partial_X\langle Y,Z\rangle + \partial_Y\langle Z,X\rangle - \partial_Z\langle X,Y\rangle +$$

$$+\langle Z,[X,Y]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

Задача 2. Найти в частном случае $k=2$, $n=3$ деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, если выбрать базис в касательных векторных полях $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ и базис $\mathbf{m}$ в нормальных векторных полях.

Задача 3. Написать уравнение Гаусса $d\Gamma^i_j + \Gamma^i_l \wedge \Gamma^l_j = b^\nu_m g_{\mu\nu} g^{mi} \wedge b^\mu_j$ в терминах Γ^l_{ij} и b^μ_{ij}. Написать его в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 4. Вывести соотношение между db, b, Γ и K (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса $d\Gamma + \Gamma\wedge\Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$, связывающим $d\Gamma$, Γ и b. Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит K. Записать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах Γ^l_{ij}, b^μ_{ij}, $K_{i,\nu}{}^{\mu}$ в частном случае двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$.

Задача 5. Выписать формулу преобразования символов Кристоффеля $\tilde\Gamma = T^{-1}\cdot\Gamma\cdot T + T^{-1}\cdot dT$ в терминах Γ^l_{ij} и $\tilde\Gamma^l_{ij}$.

Задача 6. Придумать аналог нормали средней кривизны для k-поверхности в $\mathbb{E}^n$. Естественно, при $k=2$, $n=3$ результат должен совпадать с классическим определением (и это надо проверить). *Указание: используйте линейный функционал $\xi \mapsto \operatorname{tr} W_\xi$ на пространстве $N_A M$.*

Задача 7. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$. Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле e_1 можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть t такой параметр. Доказать, что кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b^1_{11}}{g_{11}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b^{n-1}_{11}}{g_{11}}\right)^2}.$$

Задача 8. В условиях предыдущей задачи доказать, что $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln g_{11}$.

Задача 9. Найти связность в касательном расслоении, вторую квадратичную форму и оператор Вейнгартена для прямого кругового цилиндра в $\mathbb{E}^3$.

Задача 10*. Доказать первое структрурное уравнение Картана

$$d\,e^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma^\alpha_\beta,$$

где e^α — базис, дуальный к выбранному базису e_α пространства касательных векторных полей.