Гомотопические группы

11◇1. Докажите, что если пространство X линейно связно, любой путь из из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$, который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концам и началом).
Указание. Постройте и используйте отображение $\omega\colon S^n \to S^n \vee I$.

11◇2. а) Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие, то индуцированное отображение $p_*\colon \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм при $n \geqslant 2$.
б) Пусть Γ — граф. Докажите, что $\pi_n(\Gamma) = 0$ при $n \geqslant 2$.

11◇3. Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

11◇4 (5-лемма). Рассмотрим коммутитивную диаграмму групп и гоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & G_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & G_5 \arrow[d, "f_5"] \\
H_1 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & H_5
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Тогда **а)** если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.
Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

11◇5. Введите отображения и докажите точность *гомотопической последовательности тройки* (X, A, B) (где $A \subset B \subset X$):

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0)$$

11◇6. Докажите, что пространства **а)** S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$, **б)** $S^n \times \mathbb{R}P^m$ и $\mathbb{R}P^n \times S^m$ при $m, n \geqslant 2$ имеют одинаковые гомотопические группы.
Указание. Покажите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

11◇7. Докажите, что $\pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X)$ для любого X при $n \geqslant 0$.

11◇8*. Докажите, что $\Omega\mathbb{C}P^\infty \simeq S^1$.

11◇9. Докажите 3-мерную теорему Брауэра: любое непрерывное отображение $f\colon D^3 \to D^3$ имеет неподвижную точку.