Когомологии

Задача 8.0. а) Вычислите по определению симплициальные когомологии тетраэдра.
б) Приведите явный пример замкнутой неточной 2-формы на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Задача 8.1. а) Если k — поле, то $H^\bullet(X;k) \cong \mathrm{Hom}(H_\bullet(X);k)$.
б) $H^\bullet(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}(H_\bullet(\mathbb{R}P^2);\mathbb{Z})$.
в) Функтор $\mathrm{Hom}(H_\bullet;\mathbb{Z})$ не удовлетворяет аксиомам теории когомологий.

Задача 8.2. Пользуясь тем, что умножение в когомологиях многообразия соответствует пересечению циклов, докажите, что
а) $H^\bullet(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z}) \cong \Lambda[\xi_1,\xi_2]$ б) ...и найдите кольцо когомологий сферы с g ручками;
в) $H^\bullet(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong (\mathbb{Z}/2)[a]/(a^{n+1})$ $(\deg a = 1)$, $H^\bullet(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ $(\deg x = 2)$.
(Можно для начала пользоваться этой задачей дальше без доказательства.)

Задача 8.3. Если $m > n$, то любое отображение $\mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ индуцирует тривиальное отображение а) в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$; б) на π_1.

Задача 8.4. Если n четно, то не существует диффеоморфизма $\mathbb{C}P^n$ на себя, обращающего ориентацию.

Задача 8.5. а) Комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная однородным полиномиальным уравнением степени d реализует класс $dx \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, где x — класс гиперплоскости.
б) Если система из n полиномиальных уравнений степеней $d_1,\ldots,d_n$ на n неизвестных имеет конечное число решений, то этих решений не более $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Задача 8.6. $H^\bullet(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) \cong H^\bullet(\mathbb{R}P^2 \vee S^3;\mathbb{Z})$, но $H^\bullet(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}/2) \ncong H^\bullet(\mathbb{R}P^2 \vee S^3;\mathbb{Z}/2)$.

▷ Пространство X с отмеченной точкой $e \in X$ и “умножением” $\mu\colon X \times X \to X$, т. ч. $\mu(e,-) \sim \mu(-,e) \sim \mathrm{Id}_X$, называется *$H$-пространством.*

Задача 8.7. а) Если $\mathbb{R}P^{n-1}$ является H-пространством, то μ индуцирует в $H^1(-;\mathbb{Z}/2)$ отображение $a \mapsto a_1 + a_2$.
б) Выведите из предыдущего пункта, что если на $\mathbb{R}^n$ существует структура $\mathbb{R}$-алгебры с делением (возможно неассоциативной), то $n = 2^k$.
(На самом деле, это возможно только при $n = 1, 2, 4$ или 8.)