

## Гомологии клеточных пространств

**Задача 5.0.** а)  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$ ; б)  $H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ .

Определение клеточных гомологий плохо подходит для доказательства общих свойств (например, гомотопической инвариантности — которой можно пользоваться без доказательства), но отлично подходит для вычисления гомологий несложных пространств.

**Задача 5.1.** Вычислите гомологии а)  $H_\bullet(\mathbb{T}^2)$ ; б)  $H_\bullet(D^2, \partial D^2)$ ; в)  $H_\bullet(S^2, S^0)$ .

**Задача 5.2.** Вычислите гомологии а) сферы с  $g$  ручками; б)  $n$ -мерного тора.

**Задача 5.3.** Вычислите гомологии а)  $H_\bullet(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ ; б)  $H_\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$ ; в)  $H_\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$ .

**Задача 5.4\*.** Вычислите гомологии  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}/2$ .

**Задача 5.5.** Вычислите гомологии дополнения в  $S^3$  а) к двум незацепленным окружностям; б) к двум окружностям, зацепленным стандартным образом.

\* \* \*

**Задача 5.6.** а) Любой комплекс векторных пространств<sup>1</sup> над полем  $k$  может быть получен как прямая сумма фрагментов вида  $0 \rightarrow k \xrightarrow{id} k \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow k \rightarrow 0$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для комплексов свободных абелевых групп конечного ранга.

**Задача 5.7.** Если у CW-комплекса  $c_i$  клеток размерности  $i$ , то  $\sum (-1)^i c_i = \sum (-1)^i b_i$ , где  $b_i = \text{rk } H_i(X)$ .

(Вместе с корректностью определения гомологий это дает корректность определения эйлеровой характеристики.)

**Задача 5.8.** а) Постройте естественное отображение  $H_i(X) \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z}/p)$ . Приведите пример, когда это отображение *не* является изоморфизмом.

б) Убедитесь, что это отображение является вложением и найдите его коядро. Докажите, что группа  $H_i(X; \mathbb{Z}/p)$  изоморфна (неканонически) прямой сумме  $H_i(X) \otimes \mathbb{Z}/p$  и этого коядра. (Указание: используйте задачу 5.6б.)

---

<sup>1</sup>Можно считать, что все пространства конечномерные (хоть это и не важно).