Гомотопические группы и расслоения

Задача 3.0. Если $E = F \times B$, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.

Как было выяснено в прошлом листке, $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$. Можно также пользоваться без доказательства тем, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (полезно изучить доказательство в каком-нибудь учебнике!).

Задача 3.1. Вычислите а) $\pi_n(S^n \vee S^n)$; б) $\pi_n(S^1 \vee S^n)$.

Задача 3.2. Убедитесь, что гомотопическая последовательность расслоения

$$\ldots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \pi_{n-1}(E) \to \ldots$$

действительно является точной последовательностью.

Задача 3.3. Вычислите все гомотопические группы пространства а) $\mathbb{R}P^\infty$; б) $\mathbb{C}P^\infty$.

Задача 3.4. Если S^{n+k} расслаивается над S^n со слоем S^k, то $k = n - 1$.

Задача 3.5. а) Если у расслоения $F \to E \to B$ есть сечение, то $\pi_n(E) \cong \pi_n(F) \oplus \pi_n(B)$.
б) Если A — ретракт пространства X, то $\pi_n(A)$ — прямое слагаемое в $\pi_n(X)$.

Задача 3.6. $\mathbb{R}P^n$ невозможно ретрагировать на $\mathbb{R}P^k$.

Задача 3.7*. $\pi_n(S^4) \cong \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3)$; в частности, $\pi_7(S^4)$ содержит $\mathbb{Z}$ в качестве прямого слагаемого.

Можно показать, что группы $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ и $\pi_n(S^n)$ всегда имеют ранг 1, а все остальные гомотопические группы сфер состоят из кручения.