Независимый Московский Университет, Когомологии алгебраических многообразий, весна 2018

2

Пусть $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ – неприводимое проективное многообразие. Дадим три определения *размерности* $\dim \mathbf{V}$.

(1) Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ произвольное *аффинное* подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ – например, дополнение к гиперплоскому сечению. Тогда поле рациональных функций $\Bbbk(\mathbf{U})$ не зависит от выбора $\mathbf{U}$ (докажите!) и потому обозначается $\Bbbk(\mathbf{V})$.

$$\dim_1(\mathbf{V}) := \mathrm{trdeg}_{\Bbbk}\Bbbk(\mathbf{V}).$$

(2) Рассмотрим убывающие[1] цепочки подмногообразий в $\mathbf{V}$.

$$\dim_2(\mathbf{V}) := \max\{\delta \mid \exists \text{ неприводимые замкнутые } \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \supset \cdots \supset \mathbf{V}_\delta \neq \varnothing\}.$$

(3) Проекция на проективное подпространство $\pi_O : \mathbf{P}_N(\Bbbk) \setminus \{O\} \to \Pi$ называется *конечной*, если для некоторого непустого открытого подмножества $\mathbf{U} \subseteq \Pi$ имеет место импликация $[P \in \mathbf{U}] \Longrightarrow [\#(\pi_O^{-1\circ} P) < \infty]$.

$$[\dim_3(\mathbf{V}) = \delta] :\Longleftrightarrow [\mathbf{V} = \mathbf{P}_N(\Bbbk) \text{ и } \dim_3(\mathbf{V}) = N] \text{ или}$$
$$[\exists \text{ конечная } \pi_O : \mathbf{V} \to \Pi, \text{ где } \dim \Pi = \delta].$$

2.1. Докажите, что для любого неприводимого проективного многообразия $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ имеют место равенства $\dim_1(\mathbf{V}) = \dim_2(\mathbf{V}) = \dim_3(\mathbf{V})$.

2.2. Опишите плюккерово вложение $\mathbf{Gr}_{2,2} \hookrightarrow \mathbf{P}_5$ и его образ.
2.3. Вычислите $\#\mathbf{Gr}_{d,c}(\mathbf{F}_q)$.
2.4. (Шуберт). Сколько прямых проходит через 4 скрещивающихся прямые в $\mathbf{P}_3$?.

2.5. Осознайте плоскость и трёхмерное проективное пространство как проективизации пространств квадратичных и кубических многочленов одной переменной. Опишите фильтрации этих пространств, определённые наличием кратных корней.

2.6. Расклассифицируйте неприводимые плоские кубические кривые с точностью до проективной эквивалентности.
2.7. Расклассифицируйте кривые бистепени (2,2) на гладкой пространственной квадрике.
2.8. Попытайтесь расклассифицировать неприводимые проективно выпуклые пространственные кривые степеней 3, 4, 5 с точностью до проективной эквивалентности.

15 февраля, *Г.Б. Шабат*

[1] символ $\supset$ означает *строгое* включение