Листок 3

1. Докажите, что $[\mathfrak{gl}_n(\Bbbk), \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.

2. Пусть A — алгебра периодических непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с периодом 1. Пусть M — A-модуль непрерывных функций на $\mathbb{R}$, антипериодических с периодом 1, то есть $f(x+1) = -f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
а) Докажите, что A и M — неразложимые A-модули.
б) Докажите, что $A \not\simeq M$, но $A \oplus A \simeq M \oplus M$.

3. Докажите, что $Mat_n(\Bbbk) \otimes Mat_m(\Bbbk) \simeq Mat_{mn}(\Bbbk)$.

4. а)Докажите, что любой модуль над телом — свободен.
б) Обратно, если R — такое кольцо с 1, что любой модуль над R — свободен, то R — тело.

5. Пусть D — тело. Докажите, что V — n-мерный D-модуль. Докажите, что $\mathrm{End}_D(V) \simeq M_n(D^{op})$.

6*. Обобщите доказательство с лекции и докажите, что если A — произвольная алгебра и V — её конечномерное неприводимое представление, то отображение $\rho : A \to \mathrm{End}_D(V)$ — сюръективно. Здесь $D = \mathrm{End}_A(V)$.

7*. Докажите, что для произвольной конечномерной алгебры

$$A/Rad(A) \simeq \times_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i).$$

Здесь $V_1, \ldots, V_n$ — полный список различных неприводимых представлений, $D_i = \mathrm{End}_A(V_i)^{op}$.

8. Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство с симметрической билинейной формой $(,)$. Алгебра Клиффорда по определению $TV/(v \otimes v - (v,v)1)$. Точнее, если $x_1, \ldots, x_n$ — базис V и $(x_i, x_j) = a_{ij}$, то $Cl(V)$ порождена $x_1, \ldots, x_n$ с соотношениями

$$x_i x_j + x_j x_i = 2a_{ij}, x_i^2 = a_{ii}.$$

В частности, если $(,) = 0$, то $Cl(V) \simeq \Lambda V$. а) Докажите, что если $(,)$ — не вырождена, то $Cl(V)$ — полупроста. Более того, если $\dim V = 2n$, то существует ровно одно неприводимое представление размерности 2^n, а если $\dim V = 2n+1$, то два неприводимых представления размерности 2^n.
б) Докажите, что $Cl(V)$ — полупроста, если и только если $(,)$ — невырождена. Какой алгеброй в этом случае является фактор $Cl(V)/Rad(Cl(V))$?

9. Пусть A — алгебра, V, W — её представления. Пусть U — такое представление A, что $V \subset U$ — подпредставление и $U/V \simeq W$. Как векторное пространство, $U \simeq V \oplus W$. Представим действие любого элемента $a \in A$ как матрицу $\rho_U(a) = \begin{pmatrix} \rho_V(a) & f(a) \\ 0 & \rho_W(a) \end{pmatrix}$, где $f : A \to \mathrm{Hom}_\Bbbk(W, V)$ — линейное отображение.
а) Сформулируйте необходимое условие на f, так что ρ_U — представление. Отображения f, удовлетворяющие этому условию называют 1-коциклами A с коэффициентами в $\mathrm{Hom}_\Bbbk(W, V)$. Они образуют векторное пространство, обозначаемое $Z^1(W, V)$.

б) Пусть $g : W \to V$ — линейное отображение. Кограница g, $d\,g$ — это отображение $A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, V)$ заданное условием $d\,X(a) = \rho_V(A)X - X\rho_W(a)$. Докажите, что $d\,g$ — нулевой коцикл, тогда и только тогда, когда X — гомоморфизм представлений. Таким образом кограницы образуют векторное подпространство $B^1(W, V) \subset Z^1(W, V)$, изоморфное $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, V)/\mathrm{Hom}_A(W, V)$. Фактор $Z^1(W, V)/B^1(W, V)$ обозначается $\mathrm{Ext}^1(W, V)$.
в) Докажите, что если $f, f' \in Z^1(W, V)$ и $f - f' \in B^1(W, V)$, то соответствующие расширения U, U' — изоморфные представления A. Обратно, если $\varphi : U \to U'$ — изоморфизм, такой что $\phi(a) = \begin{pmatrix} 1_V & * \\ 0 & 1_W \end{pmatrix}$, то $f - f' \in B^1(W, V)$. Таким образом, пространство $\mathrm{Ext}^1(W, V)$ в некотором смысле классифицирует расширения W посредством V.
г) Пусть W и V — конечномерные неприводимые представления A. Для любого $f \in \mathrm{Ext}^1(W, V)$, обозначим через U_f соответствующее представление. Докажите, что $U_f \simeq U_{f'}$ тогда и только тогда, когда f пропорционально f'. Таким образом, расширения W посредством V с точностью до изоморфизма параметризуются $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W, V)$.

10. Пусть $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ и V_a, V_b — одномерные представления, в которых x_i действует a_i и b_i соответственно ($a_i, b_i \in \mathbb{C}$). Найдите $\mathrm{Ext}^1(V_a, V_b)$ и классифицируйте все 2-мерные представления A.

11. Пусть Q — колчан без циклов, P_Q — алгебра путей. Найдите неприводимые представления P_Q и посчитайте Ext^1 между ними. Классифицируйте двумерные представления колчана.