Листок 1

Во всех задач алгебра предполагается ассоциативной и с 1.

1. Пусть A — алгебра, V — её неразложимое конечномерное представление. Докажите, что любой морфизм V либо изоморфизм, либо нильпотентен.

2. Пусть A — алгебра, V — её неприводимое конченомерное представление. Докажите, что существует $U \subset V$ — неприводимое подпредставление. Приведите пример алгебры и бесконечномерного представления, для которых это не верно.

3. Докажите, что $\mathrm{End}_A(A) \simeq A^{op}$. Здесь $\mathrm{End}_A(A) = \mathrm{Hom}_A(A, A)$ — алгебра морфизмов регулярного представления, A^{op} — алгебра с противоположным умножением.

4. Докажите бесконечномерную лемму Шура: пусть V — не более чем счётномерное неприводимое представление алгебры над $\mathbb{C}$. Докажите, что любой морфизм V — скалярный оператор.

Опр. Алгеброй Вейля над полем $\Bbbk$ называется алгебра порождённая элементами x, y с определяющим соотношением $yx - xy - 1 = 0$.

5. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$.

а) Докажите, что у алгебры Вейля нет конечномерных нетривиальных представлений.

б) Докажите, что алгебра Вейля — проста.

б) Докажите, что центр алгебры Вейля — тривиален.

6. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$.

а) Докажите, что элементы $\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ составляют базис в алгебре Вейля.

б) Найдите центр алгебры Вейля.

в) Опишите все конечномерные неприводимые представления.

Опр. q-алгеброй Вейля над полем $\mathbb{C}$ называется алгебра порождённая элементами x, y, x^{-1}, y^{-1} с определяющими соотношениями $xy = qyx, xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y$.

7. а) Найдите центр q-алгебры Вейля.

б) Для каких q существуют конечномерные представления?

в) Найдите все конечномерные неприводимые представления для q из пункта б). Сравните ответ с 6в).