

Листок 5*.

Теорема А.Н. Колмогорова

Задача 1. (а) Всякую ли функцию двух переменных можно представить в виде $h(\varphi(x) + \psi(y))$, где h, φ, ψ – функции одной переменной.

(б) Докажите, что не существует непрерывных функций h, φ, ψ на \mathbb{R} таких, что

$$xy = h(\varphi(x) + \psi(y)).$$

Выведите из этого результата, что множество функций вида $h(\varphi(x) + \psi(y))$ не является замкнутым в пространстве $C([0, 1] \times [0, 1])$.

Задача 2.* Докажите, что множество функций вида $h(\varphi(x) + \psi(y))$ нигде не плотно в пространстве $C([0, 1] \times [0, 1])$.

Задача 3. (а) Всякую ли функцию трех переменных $f(x, y, z)$ можно представить в виде $h(z, g(x, y))$, где h, g – функции двух переменных?

(б) Можно ли функцию $xy + yz + xz$ представить в указанном выше виде с помощью *непрерывных* функций h и g ?

Задача 4. Пусть $\Delta = [0, 4]$ и $\Delta_j = \Delta + 5j$, где $j \in \mathbb{Z}$. Через $I_k, k = 1, 2, \dots, 5$, обозначим систему отрезков вида $\Delta_j^k = \Delta_j + k$.

(а) Докажите, что всякая точка x лежит в каком-то из интервалов системы I_k для всех $k = 1, 2, \dots, 5$, кроме быть может одного.

(б) Докажите, что всякая точка (x, y) лежит в каком-то из квадратов $\Delta_{ij}^k = \Delta_i^k \times \Delta_j^k$ для всех $k = 1, 2, \dots, 5$, кроме быть может двух.

(с) Пусть φ – непрерывная функция, постоянна на отрезках Δ_j . Предположим, что на этих отрезках функция принимает рациональные значения, причем на разных отрезках различные значения. Докажите, что функция $\varphi(x) + \sqrt{2}\varphi(y)$ постоянна на квадратах $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta_j$, причем на разных квадратах она принимает различные значения.

Далее через $N^{-1}\Delta_j$ обозначаем отрезки $[0, 4N^{-1}] + 5N^{-1}j$. Полагаем $N^{-1}\Delta_j^k = N^{-1}\Delta_j + kN^{-1}$.

Задача 5. Докажите, что для всякой непрерывной функции ψ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N и непрерывная функция φ , что φ постоянна на всяком $N^{-1}\Delta_j$, принимает на этих отрезках рациональные значения, причем на разных отрезках различные значения, и $\max_{[0,1]} |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция на $[0, 1] \times [0, 1]$ и $M = \max_{[0,1]^2} |f(x, y)|$. Пусть X является декартовым произведением пяти пространств $C([0, 1])$. Заметим, что X – полное метрическое пространство. Рассмотрим множество $Y(f)$ наборов $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5)$ из X , таких, что для каждого из них найдутся (свои) непрерывные на \mathbb{R} функции h_1, h_2, \dots, h_5 , для которых выполнены условия:

$$\sup_t |h_k(t)| \leq M/3, \quad \max_{[0,1]^2} \left| f(x, y) - \sum_{k=1}^5 h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) \right| < \frac{5}{6}M. \quad (*)$$

Задача 6. Докажите, что $Y(f)$ – открытое множество в X .

Пусть дан произвольный набор $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_5)$ из X . Покажем, что сколь угодно близко (по метрике X) к этому набору найдется набор из $Y(f)$. Действительно, найдем достаточно большое N и функции φ_k такие, что φ_k мало отличается от ψ_k на $[0, 1]$ и φ_k постоянна на всех отрезках $N^{-1}\Delta_j^k$, причем на каждом из этих отрезков она принимает рациональные значения, на разных отрезках – разные значения.

В каждом квадрате $N^{-1}\Delta_i^k \times N^{-1}\Delta_j^k$ выберем точку (ξ_{ij}, η_{ij}) и построим непрерывную функцию h_k так, что $h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) = \frac{1}{3}f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$.

Задача 7. Постройте такую функцию h_k .

Увеличивая N (т. е. уменьшая квадраты) можно считать колебание функции f на каждом квадрате $N^{-1}\Delta_i^k \times N^{-1}\Delta_j^k$ меньше $M/6$. Тогда

$$|f(x, y) - \sum_{k=1}^5 h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y))| < \frac{M}{6} + \frac{2M}{3} = \frac{5M}{6}.$$

Задача 8. Обоснуйте последнее неравенство.

Таким образом множество $Y(f)$ не пусто и плотно в X . Выберем в $C([0, 1] \times [0, 1])$ счетное всюду плотное множество функций f_l .

Задача 9. Докажите, что $\bigcap_{l=1}^{\infty} Y(f_l) \neq \emptyset$. (Указание: применить теорему Бэра.)

Пусть $(\varphi_1, \dots, \varphi_5) \in \bigcap_{l=1}^{\infty} Y(f_l)$.

Задача 10. Докажите, что для всякой функции $f \in C([0, 1] \times [0, 1])$ найдутся непрерывные функции h_1, \dots, h_5 , для которых выполняются неравенства (*) с функциями $(\varphi_1, \dots, \varphi_5)$.

Задача 11. Докажите теорему А.Н.Колмогорова: для всякой непрерывной функции $f(x, y)$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ найдутся такие непрерывные функции h_k и φ_k одной переменной, что

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^5 h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)).$$

Задача 12*. Обобщите результат задачи 11 на случай непрерывной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.