Листок 5.

Задача 1. Приведите пример функции $f(x, y)$ непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

Задача 2. Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x и равномерно непрерывна по y, т. е. $\sup_x |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 3. Пусть $f(x, y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности. Докажите, что найдется хотя бы одна точка, в которой f непрерывна по совокупности переменных. (Указание: приблизить функцию последовательностью непрерывных функций и воспользоваться тем, что у предела такой последовательности есть точка непрерывности.)

Задача 4. Функция $f(x, y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности и обращается в ноль на счетном всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $f \equiv 0$. (Указание: применить теорему Бэра.)

Задача 5. Пусть $f(x, y)$ – непрерывная функция по совокупности переменных. Известно, что на каждой прямой, проходящей через начало координат, начало координат является точкой локального минимума функции f. Верно ли, что начало координат является точкой локального минимума функции f?

Задача 6. Расстояние от точки x до множества A равно величине $d(x, A) = \inf_{y \in A} \varrho(x, y)$. Пусть $\mathcal{K}$ – все непустые компактные подмножества куба $[0, 1]^n$. Докажите, что метрика Хаусдорфа

$$d(A, B) = \max\Big\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\Big\}$$

действительно является метрикой на $\mathcal{K}$. Покажите, что $\mathcal{K}$ с метрикой Хаусдорфа является полным и даже компактным пространством.

Задача 7. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ – набор из сжимающих отображений куба $[0, 1]^n$ в себя. Докажите, что отображение $F(A) = F_1(A) \cup F_2(A) \cup \ldots \cup F_m(A)$ является сжимающим отображением $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$. Для какого отображения F множество Кантора является неподвижной точкой?

Задача 8. Докажите, что непустой компакт в метрическом пространстве не может быть изометричен своей собственной части.

Задача 9. Пусть (K, ϱ) – компактное метрическое пространство. Докажите, что если $f\colon K \to K$ удовлетворяет условию $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$ при $x \neq y$, то у f есть неподвижная точка.

Задача 10. Докажите, что обратное отображение непрерывной биекции компакта на компакт является непрерывным.

Задача 11. Докажите, что не существует непрерывной биекции

(a) отрезка на квадрат (b) отрезка на окружность (c) окружности на круг.

Задача 12. Докажите, что всякое непустое компактное множество в метрическом пространстве является образом множества Кантора при некотором непрерывном отображении. Постройте кривую Пеано: непрерывной сюръективное отображение отрезка на квадрат.