Листок 3*.

Задача 1. (Множество Витали) Зададим на единичной окружности S^1 отношение эквивалентности: $\alpha \sim \beta$, если $\alpha = \beta + r\pi$, где r – рациональное число. Выберем из каждого класса эквивалентности по представителю и соберем их в множество E. Докажите, что

(a) $S^1 = \cup_n (E + r_n\pi)$, где r_n – занумерованные рациональные числа,

(b) $(E + r_n\pi) \cap (E + r_m\pi) = \emptyset$, если $r_n \neq r_m(\mathrm{mod}2)$.

(c) Докажите, что найдутся такие непересекающиеся множества H_i и повороты R_i, что

$$S^1 = \sqcup_i H_i, \quad S^1 = \sqcup_k R_{2k} H_{2k} = \sqcup_k R_{2k+1} H_{2k+1}.$$

Таким образом, окружность можно разрезать на счетное число частей и сложить из них две точно такие же окружности. В трехмерном пространстве сферу можно разрезать уже на конечное число частей и сложить из них две таких же сферы.

Рассмотрим множество слов, составленных из букв A, A^{-1}, B, B^{-1}. Если в слове встречаются рядом A и A^{-1} или B и B^{-1}, то их можно стереть (сократить). Будем считать, что в слове все, что можно, сокращено. Через I обозначаем пустое слово. Множество всех таких несократимых слов вместе с пустым обозначим через G. Можно показать, что G – группа с операцией приписывания одного слова к другому, например $(ABBA) \cdot (BABA) = ABBABABA$.

Группа G называется свободной группой с двумя образующими A и B. Ясно, что

$$G = \{I\} \sqcup G(A) \sqcup G(A^{-1}) \sqcup G(B) \sqcup G(B^{-1}),$$

где $G(A)$ – слова начинающиеся с буквы A, $\sqcup$ – объединение непересекающихся множеств.

Положим

$$G_1 = G(A) \cup \{I, A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, \ldots\}, \quad G_2 = G(A^{-1}) \setminus \{A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, \ldots\},$$
$$G_3 = G(B), \quad G_4 = G(B^{-1}).$$

Задача 2. Докажите, что $G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup G_3 \sqcup G_4$ и

$$G = G_1 \sqcup AG_2, \quad G = G_3 = \sqcup BG_4,$$

где AG_2 – слова, которые получаются из слов G_2 дописыванием впереди буквы A.

Пусть теперь A и B обозначают поворот с одним центром. Тогда всякое слово из G задает поворот, например слово $ABAB$ задает поворот, являющийся последовательной композицией поворотов A, B, A и B.

В следующих задачах считаем известным, что существуют два поворота A и B с одним центром, для которых различные слова из группы G задают различные повороты.

Для каждой точки $x \in S^2$ через Gx обозначаем все возможные образы x под действием поворотов из G. Множество Gx называется орбитой.

Задача 3. Докажите, что если две орбиты пересекаются, то совпадают.

Через C обозначим множество точек единичной сферы S^2, лежащих на осях поворотов из G. Ясно, что C – не более чем счетное множество.

Задача 4. Докажите, что орбита всякого $x \in S^2 \setminus C$ не пересекается с C.

Задача 5. Докажите, что для всякого $x \in S^2 \setminus C$ орбита Gx разбита на четыре непересекающихся множества G_1x, G_2x, G_3x и G_4x.

Используя аксиому выбора фиксируем в каждой орбите, которая не пересекается с C, точку и собираем все такие точки в множество X. Тогда

$$S^2 \setminus C = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \Omega_3 \sqcup \Omega_4, \quad \Omega_i = \sqcup_{x \in X} G_i x.$$

Задача 6. Докажите, что

$$S^2 \setminus C = \Omega_1 \sqcup A\Omega_2, \quad S^2 \setminus C = \Omega_3 \sqcup B\Omega_4,$$

где множества $A\Omega_2$ и $B\Omega_4$ получаются из Ω_2 и Ω_3 с помощью поворотов A и B соответственно.

Задача 7. Докажите, что найдутся такие непересекающиеся множества Σ_1, Σ_2 и поворот R, что

$$S^2 = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2, \quad S^2 \setminus C = \Sigma_1 \sqcup R\Sigma_2.$$

(Указание: найти поворот R такой, что $R^i C \cap R^j C = \emptyset$ при $i \neq j$ и задать требуемые множества так $\Sigma_2 = C \sqcup RC \sqcup R^2C \sqcup \ldots$, $\Sigma_1 = S^2 \setminus \Sigma_2$.)

Задача 8. (Парадокс Банаха-Тарского для сферы) Объединяя результаты задач 6 и 7 докажите что найдутся непересекающиеся множества $H_1, \ldots, H_8$ и повороты $R_1, \ldots, R_8$ такие, что

$$S^2 = \sqcup_{i=1}^8 H_i, \quad S^2 = \sqcup_{i=1}^4 R_i H_i = \sqcup_{i=5}^8 R_i H_i.$$

Задача 9. (Парадокс Банаха-Тарского для шара) Докажите, что утверждение задачи 8 останется верным, если заменить S^2 на единичный шар.

Задача 10. Докажите, что повороты A и B, заданные матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют нашему предположению, что никакое нетривиальное слово из G не задает тривиальный поворот. (Указание: доказать, что для всякого слова $g \in G$ соответствующий поворот сопоставляет вектору $(1, 0, 0)$ вектор $(a, b, c)/5^k$, где a, b, c – целые числа, k – натуральное число, причем b не делится на 5.)