НМУ, I курс, 12.02.2018

Листок 1.

Дифференцируемая функция F на интервале (a,b) называется первообразной или неопределенным интегралом функции f, если $F' = f$. Далее обозначаем $F = \int f(x)\,dx$. Ясно, что функция F определена с точностью до добавления константы.

Задача 1. Раскладывая на простейшие дроби укажите алгоритм интегрирования произвольной рациональной функции. Найдите $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

Задача 2. При каких значениях параметров a, b, c интеграл

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

является рациональной функцией?

Пусть $g(x,y)$ – неприводимый многочлен. Кривая, заданная уравнением $g(x,y)=0$, называется рациональной, если существует пара рациональных функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ такая, что $g(x(t), y(t)) = 0$ для всех t кроме конечного числа и для всех точек кривой (x_0, y_0) кроме конечного числа существует t_0, для которого $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$.

Задача 3. Найдите рациональную параметризацию кривых

$$x^2+y^2=1, \quad x^2-y^2=1, \quad x^3+y^3-xy=0, \quad x^3+y^3-x^2=0.$$

Объясните как найти первообразные

$$\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx, \quad \int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx, \quad \int R(x,\sqrt{1+x^2})\,dx, \quad \int R(x,\sqrt[3]{x^2-x^3})\,dx,$$

где R – произвольная рациональная функция.

Задача 4. Покажите, что всякая кривая, заданная уравнением $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, является рациональной.

Задача 5. Докажите, что кривая $x^n+y^n=1$ при $n \geq 3$ не является рациональной.

Пусть $g(x,y)$ – неприводимый многочлен степени n. Точка (x_0,y_0) кривой $g(x,y)=0$ называется особой точкой кратности $k \geq 2$, если после замены $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ у многочлена $\widetilde{g}(u,v) = g(u+x_0, v+y_0)$ нет членов степени $\leq k-1$.

Задача 6. Пусть g – неприводимый многочлен степени $n=3$. Предположим, что у соответствующей кривой есть особая точка кратности 2. Докажите, что это рациональная кривая. Попробуйте обобщить эту задачу на случай $n \geq 4$.

Задача 7. Найдите $\int \frac{\sin x}{\cos x + 3\sin x}\,dx$, $\int x^n e^x\,dx$, $\int \sin^n x\,dx$, $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Задача 8. Пусть $G = \int g(y)\,dy$ и $F = \int f(x)\,dx$ на (a,b). Докажите, что дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $g(y)y' = f(x)$ на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $G(y(x)) = F(x) + C$ для всех $x \in (a,b)$ и некоторого C. Решите уравнение $y' = \lambda y$.

Задача 9. (Остывание чайника) Исходя из того, что скорость остывания чайника пропорциональна разности его температуры и температуры воздуха, выведите зависимость температуры чайника от времени и оцените время его остывания до комнатной температуры.

Задача 10. (Водяные часы) Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия на дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле $0,6\sqrt{2gH}$, где g – ускорение силы тяжести, а H – высота уровня воды над отверстием. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при стечении из него воды уровень воды понижался равномерно?

Теорема Лиувилля *Пусть f и g рациональные функции, причем функция f не является тождественным нулем, а функция g не является константой. Интеграл*

$$\int f(z)e^{g(z)}\,dz$$

является элементарной функцией (это означает, что функция принадлежит полю, полученному последовательным присоединением к полю рациональных функций конечного набора алгебраических элементов или элементов, которые являются экспонентами или логарифмами элементов, полученных на предыдущих шагах расширения исходного поля) тогда и только тогда, когда существует такая рациональная функция a, для которой имеет место равенство $f = a' + ag'$.

Задача 11. Проверьте, что интеграл от e^{z^2} не является элементарной функцией.

Задача 12. Проверьте, что интеграл от e^z/z не является элементарной функцией.