

## Представления над незамкнутыми полями

Все представления в этом листке считаются конечномерными.

**Задача 1.** а) Докажите, что для любой конечной группы существует точное представление над любым полем.

б) Докажите, что для любой конечной группы  $G$  существуют такие  $n$  и множество  $X \subset \mathbb{R}^n$ , что  $G$  есть группа линейных преобразований  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих  $X$ .

**Задача 2.** Пусть  $|G| \neq 0$  в  $k$ ,  $V_1, \dots, V_k$  — все неприводимые представления  $G$  над  $k$ ,  $c_i = \dim_k \text{End}^G(V_i)$ . а) Докажите формулу  $|G| = \sum_{i=1}^k (\dim_k V_i)^2 / c_i$ .

б) Получите аналог (для незамкнутого поля) формулы для числа классов неприводимых представлений через количество классов сопряжённости элементов  $G$ .

**Задача 3.** Докажите, что любое представление конечной группы над  $\mathbb{R}$  изоморфно своему двойственному.

Пусть  $\mathbb{H}$  — алгебра кватернионов: алгебра над  $\mathbb{R}$  с базисом  $1, i, j, k$  и умножением  $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ . Пусть  $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$  — подгруппа по умножению.

**Задача 4.** а\*) Докажите, что всякая конечномерная алгебра с делением над  $\mathbb{R}$  изоморфна  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ . б) Если  $U$  — неприводимое представление  $G$  над  $\mathbb{R}$ , то  $\text{End}^G(U) \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ .

**Овеществление и комплексификация.** Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ , оно является векторным пространством и над  $\mathbb{R}$ , обозначим его  $V_{\mathbb{R}}$ . Пусть  $U$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , положим  $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U$ , это векторное пространство над  $\mathbb{C}$ .

Пусть дано представление группы  $G$  в комплексном пространстве  $V$ . Забывая комплексную структуру, получаем представление  $G$  в  $V_{\mathbb{R}}$  над  $\mathbb{R}$ . Обратно, если  $\rho: G \rightarrow GL(U)$  — представление в пространстве  $U$  над  $\mathbb{R}$ , то определено представление  $\rho_{\mathbb{C}}: G \rightarrow GL(U_{\mathbb{C}})$  в пространстве  $U_{\mathbb{C}}$ :  $\rho_{\mathbb{C}}(g)(z \otimes u) = z \otimes \rho(g)(u)$ .

**Задача 5.** а) Как связаны размерности  $V$  и  $V_{\mathbb{R}}$ ?  $U$  и  $U_{\mathbb{C}}$ ?

б) Пусть  $U$  — вещественное представление. Докажите, что  $(U_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong U \oplus U$ .

с) Пусть  $V$  — комплексное представление. Докажите, что  $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V^*$ .

**Задача 6.** Пусть  $U_1, U_2$  — представления  $G$  над  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$\text{Hom}^G(U_1, U_2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \text{Hom}^G((U_1)_{\mathbb{C}}, (U_2)_{\mathbb{C}}).$$

**Задача 7.** Пусть  $V$  — неприводимое представление  $G$  над  $\mathbb{C}$ . Тогда либо  $V_{\mathbb{R}}$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , либо  $V$  изоморфно представлению вида  $U_{\mathbb{C}}$ , где  $U$  — неприводимое вещественное представление.

**Задача 8.** Пусть  $U$  — неприводимое представление группы  $G$  над  $\mathbb{R}$ .

а) Если  $\text{End}^G(U) = \mathbb{R}$ , то  $U_{\mathbb{C}}$  неприводимо и  $U_{\mathbb{C}} \cong U_{\mathbb{C}}^*$ .

б) Если  $\text{End}^G(U) = \mathbb{C}$ , то  $U_{\mathbb{C}} \cong V_+ \oplus V_-$ , где представления  $V_+$  и  $V_-$  неприводимы над  $\mathbb{C}$ , неизоморфны друг другу и  $(V_+)^* \cong V_-$ .

с) Если  $\text{End}^G(U) = \mathbb{H}$ , то  $U_{\mathbb{C}} \cong V \oplus V$ , где представление  $V$  неприводимо над  $\mathbb{C}$  и  $(V)^* \cong V$ .

д) Приведите примеры ко всем трём случаям.

**Задача 9.** Докажите, что любое неприводимое представление конечной абелевой группы над  $\mathbb{R}$  одномерно или двумерно.

**Задача 10.** Опишите все неприводимые представления над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  для

а) конечной циклической группы; б)  $S_3$  и  $S_4$ ; с) кватернионной группы  $Q$ .