НМУ
Алгебра 2

21 марта 2018
Листок 6

Представления разных групп

В этом листочке предполагается, что основное поле — поле комплексных чисел.

Задача 1. Пусть S_n — группа перестановок, а $A_n \subset S_n$ — подгруппа чётных перестановок.

a) Докажите, что коммутант S_n есть A_n.

b) Найдите коммутант A_n.

Задача 2. Разложите на неприводимые слагаемые представления

a°) S_n и

b) A_n в $\mathbb{C}^n$ перестановками базиса.

Задача 3. Опишите все неприводимые представления

a°) S_4;

b) A_4.

Задача 4. Пусть T обозначает группу движений тетраэдра. Как мы помним, T изоморфна S_4. Разложите в прямую сумму неприводимых естественное представление T в пространстве функций на

a°) вершинах; b°) рёбрах; c) гранях тетраэдра.

Задача 5. Пусть O обозначает группу вращений куба. Как мы помним, O изоморфна S_4. Разложите в прямую сумму неприводимых естественное представление O в пространстве функций на

a) вершинах; b) рёбрах; c) гранях куба.

Напомним, *группой диэдра* D_n (при $n \geqslant 3$) называется группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих прямоугольную призму, основание которой — правильный n-угольник.

Задача 6. a) Покажите, что D_n изоморфна группе движений плоскости, сохраняющих правильный n-угольник.

b) Найдите коммутант D_n.

c) Опишите классы сопряжённости элементов в D_n.

d) Дайте определение D_n для $n = 2$.

Задача 7. Опишите все неприводимые представления группы D_n

a) при нечётном n;

b) при чётном n.

Задача 8. Опишите все неприводимые представления $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$.

Задача 9. Пусть V_1 и V_2 — представления групп G_1 и G_2. Определим представление группы $G_1 \times G_2$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$ равенством $(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1(v_1) \otimes g_2(v_2)$.

a) Пусть V_1 и V_2 – неприводимые представления. Тогда и $V_1 \otimes V_2$ — неприводимое представление группы $G_1 \times G_2$.

b) Докажите, что так получаются все неприводимые представления $G_1 \times G_2$.