Операторы в евклидовом пространстве

В этом листке мы рассматриваем векторные пространства над $\mathbb{R}$ с фиксированным евклидовым скалярным произведением $(x, y) = Q(x, y)$.

Определение 1. Оператор $F \in L(V)$ называется *ортогональным*, если $(v, u) = (F(v), F(u))$ при всех $u, v \in V$. Множество ортогональных операторов на V обозначается $O(V)$, а множество ортогональных операторов на V с определителем 1 обозначается $SO(V)$.

Задача 1.

a) Покажите, что $O(V)$ — группа относительно композиции. В частности, ортогональный оператор невырожден.

b) Покажите, что детерминант ортогонального оператора равен ± 1.

c) Пусть $F \in L(V)$, а A — матрица F в некотором ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Покажите, что ортогональность оператора F равносильна любому из следующих условий: 1) F переводит $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис; 2) векторы-столбцы A ортогональны и имеют длину 1; 3) векторы-строки A ортогональны и имеют длину 1; 4) $A^T = A^{-1}$.

Задача 2. Пусть $F \in L(V)$ — ортогональный оператор.

a) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение F. Покажите, что $|\lambda| = 1$.

b) Пусть $U \subset V$ — подпространство, сохраняемое F. Тогда $U^{\perp}$ также F-инвариантно.

c) Покажите, что F диагонализируется над $\mathbb{C}$.

d) Покажите, что V есть прямая сумма F-инвариантных подпространств размерности 1 или 2.

Задача 3. a) Докажите, что $O(\mathbb{R}^2)$ состоит из операторов вида
$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (повороты) и $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ (осевые симметрии).

b) Докажите, что $SO(\mathbb{R}^3)$ состоит из поворотов относительно осей.

c) Как устроены ортогональные операторы в $\mathbb{R}^3$ с определителем -1?

Определение 2. *Сопряжённым* к оператору $F \in L(V)$ называется оператор $F^* \in L(V)$, для которого при всех $u, v \in V$ верно $(F(v), u) = (v, F^*(u))$.

Задача 4. a) Покажите, что $F^{**} = F$ и $(F_1 F_2)^* = F_2^* F_1^*$.

b) Пусть $F^{\vee} \in L(V^*)$ — двойственное отображение к F. Проверьте, что при изоморфизме $\phi \colon V \to V^*$, который индуцирован Q, оператор F^* соответствует $F^{\vee}$, т.е. $F^* = \phi^{-1} F^{\vee} \phi$.

c) Проверьте: в ортонормированном базисе матрица F^* есть транспонированная матрица F.

d) Выразите матрицу F^* через матрицу F и матрицу Q в общем случае.

e) Покажите, что F ортогонален тогда и только тогда, когда $F^* = F^{-1}$.

Определение 3. Оператор F называется *самосопряжённым*, если $F = F^*$.

Очевидно, F самосопряжён $\iff$ матрица F в ортонормальном базисе симметрична.

Задача 5. Пусть $F \in L(V)$ — самосопряжённый оператор.

a°) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение F. Покажите, что $\lambda \in \mathbb{R}$.
Подсказка: рассмотрите $(\bar{X})^T A X = \sum \bar{x}_i a_{ij} x_j$, где A — матрица F в ортонормальном базисе, а $X \in \mathbb{C}^n$ — собственный вектор.

b°) Пусть $U \subset V$ — подпространство, сохраняемое F. Тогда $U^{\perp}$ также F-инвариантно.

c°) Покажите, что существует ортонормальный базис V из собственных векторов для F.

Пусть B — симметрическая билинейная форма на V. Определим *присоединённый* к B оператор K на V равенством $B(v,u) = Q(K(v),u)$ при всех $u, v \in V$. Почему он существует?

Задача 6. a) Покажите, что K самосопряжён.

b) Покажите, что существует ортонормальный для Q базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором B записывается диагональной матрицей с коэффициентами $\lambda_i = B(e_i, e_i)$. Векторы e_i называются *главными осями*, а числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — *главными значениями* формы B (и её квадратичной формы b).

Задача 7. Найдите главные оси и главные значения для квадратичных форм в $\mathbb{R}^3$:
a°) $xy + yz + xz$; b) $-3x^3 + 3y^2 + 12xz + 12yz$.

Задача 8. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — главные значения квадратичной формы b. Обозначим через $S = \{v \in V \mid Q(v,v) = 1\}$ единичную сферу в V. Докажите, что

a) $\lambda_1 = \max\{b(v) \mid v \in S\}$;

b) $\lambda_k = \max_H \min\{b(v) \mid v \in S \cap H\}$, где максимум берётся по всем подпространствам $H \subset V$ размерности k.

Задача 9. Классифицируйте самосопряжённые ортогональные операторы.

Задача 10. Пусть $F \in L(V)$. Определим билинейную форму G равенством $B(v,u) := Q(F(v), F(u))$.

a) Проверьте, что B — симметричная неотрицательно определённая.

Пусть e_i и λ_i — главные оси и главные значения B. Предположим, что F обратим.

b) Проверьте, что $\{F(e_i)\}$ — ортогональный базис, а $\{e'_i := \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} F(e_i)\}$ — ортонормальный базис V.

c) Докажите, что F представляется в виде $F = L \cdot U$ и в виде $F = U \cdot L$, где U ортогонален, а L самосопряжён и имеет неотрицательные собственные значения. Такое представление называется *полярным разложением.*

d) Покажите, что для полярного разложения $F = UL$ имеет место равенство $L^2 = K$, где $K = F^*F$ — присоединённый к форме B оператор.

e) Проверьте, что полярное разложение невырожденнного оператора единственно.

f) Докажите существование полярного разложения для произвольного оператора.

Задача 11. Найдите полярное разложение операторов

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b°) $\begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.