# Операторы

**Определение 1.** Оператор $A$ называется *проектором* или *идемпотентом*, если $A^2 = A$. Оператор $A$ называется *нильпотентом*, если $A^k = 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

**Задача 1.** Пусть $A$ — проектор на пространстве $V$, положим $A' = \mathrm{Id} - A$. Покажите, что

a) $A'$ — тоже проектор, при этом $AA' = A'A = 0$, $\ker A = \operatorname{im} A'$ и $\ker A' = \operatorname{im} A$;

b) $V = U \oplus U'$, где $U = \operatorname{im} A, U' = \operatorname{im} A'$, при этом $A$ и $A'$ соответствуют проекциям на $U$ и $U'$. Проекторы $A$ и $A'$ называют *дополнительными*.

c) Обратно, любое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт проекторы $A, A' \in L(V)$ на слагаемые $U$ и $U'$ соответственно, для которых $A + A' = \mathrm{Id}$, $AA' = A'A = 0$.

d) Обобщите предыдущие пункты на случай нескольких прямых слагаемых.

**Задача 2°.** Пусть операторы $A, B \in L(V)$ диагонализируемы и *коммутируют*, т.е. $AB = BA$. Тогда $A$ и $B$ можно одновременно привести к диагональному виду.

**Задача 3.** Пусть оператор $A \in L(V)$ диагонализируем. Опишите его *централизатор*:

$$Z(A) := \{X \in L(V) \mid AX = XA\}.$$

Какова его размерность?

**Задача 4.** Пусть операторы $A, B \in L(V)$ нильпотентны и коммутируют.

$a°$) Покажите, что $A + B$ и $AB$ тоже нильпотентны.

$b°$) Покажите, что для некоммутирующих операторов пункт a) неверен. Приведите примеры.

**Задача 5.** Пусть $V$ — векторное пространство над полем характеристики ноль, $A \in L(V)$. Покажите, что

a) $A$ — нильпотент $\iff \chi_A(t) = t^n$, где $n = \dim V$;

b) $A$ — нильпотент $\iff \operatorname{tr}(A^k) = 0$ при всех $k \geqslant 1$.

**Определение 2.** Пусть $A \in L(V)$ — оператор. *Разложением Жордана* называется его представление в виде $A = A_{ss} + A_n$, где $A_{ss}A_n = A_nA_{ss}$, оператор $A_{ss}$ полупростой, а $A_n$ — нильпотентный. $A_{ss}$ и $A_n$ называются *полупростой* и *нильпотентной частями* $A$.

**Задача 6.** Предположим, что поле $\mathrm{k}$ алгебраически замкнуто. Покажите, что

a) разложение Жордана существует;

b) $A_{ss}$ и $A_n$ сохраняют корневые подпространства $V_\lambda(A) \subset V$;

c) разложение Жордана единственно;

d) $A_{ss}$ и $A_n$ суть многочлены от $A$ с коэффициентами в $\mathrm{k}$.

**Задача 7.** Найдите характеристический многочлен, собственные числа и жорданову нормальную форму следующих операторов:

$a°$) $V = \mathbb{C}^n$, $A \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_n, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$.

b) $V = \mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $A \colon V \to V$ есть умножение на фиксированное число $z \in \mathbb{C}$.

c) $V = \mathrm{k}[t]/(p(t))$, где $p(t) = (t - a_1)(t - a_2) \ldots (t - a_n)$, $a_i \in \mathrm{k}$, оператор $A \in L(V)$ есть умножение на $[t]$.

**Задача 8 (Делёж сокровищ или дискретное уравнение теплопроводности).** Разбойники сидят за круглым столом, у каждого есть некоторое количество золота. Раз в минуту одновременно каждый разбойник забирает у каждого из двух своих соседей долю золота, равную фиксированному числу $a \in \mathbb{R}$.

a) Покажите, что ежеминутное перераспределение золота задаётся некоторым линейным оператором $A$ на $\mathbb{R}^n$ (где $n$ — число разбойников). Напишите его матрицу.

b) Найдите собственные векторы, собственные значения и жорданову нормальную форму $A$.

Подсказка: работайте с $\mathbb{C}^n$. Используйте, что оператор перераспределения коммутирует с оператором поворота. Диагонализируйте оператор поворота.

c) Пусть $n$ чётно. При каких $a$ с течением времени распределение золота будет стремиться к равномерному (независимо от начального распределения)?