НМУ
Алгебра 2

20 мая 2018

Экзамен — ответы и комментарии

Задача 1. Для каждого $a \in \mathbb{Z}$ найдите степень поля разложения многочлена $(x^3-2)(x^2-a)$ над $\mathbb{Q}$.

Ответ. При a вида k^2 или $-3k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$, степень равна 6, иначе 12. Искомое поле есть

$$K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{a}, \sqrt[3]{1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{a}, \sqrt{-3}].$$

Пусть $L = \mathbb{Q}[\sqrt{a}, \sqrt{-3}]$, тогда $[L:\mathbb{Q}] = d = 2$ или 4. Далее $[K:\mathbb{Q}] = [L[\sqrt[3]{2}]:L]\cdot[L:\mathbb{Q}] \leqslant 3d$. С другой стороны, $[K:\mathbb{Q}] \vdots [L:\mathbb{Q}] = d$ и $[K:\mathbb{Q}] \vdots [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]:\mathbb{Q}] = 3$, поэтому $[K:\mathbb{Q}] \vdots 3d$. Значит, $[K:\mathbb{Q}] = 3d$. Осталось найти d: оно равно 2 титтк $\sqrt{a} \in Q[\sqrt{-3}]$. Аналогично задаче 9.1ab проверяется, что $\sqrt{a} \in Q[\sqrt{-3}]$ титтк $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ или $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}\cdot\sqrt{-3}$, т.е. a вида k^2 или $-3k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. При каком наименьшем n существует матрица в $M_n(\mathbb{R})$, жорданова нормальная форма которой содержит клетку $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$? Приведите пример такой матрицы.

Ответ: При $n = 4$. Во-первых, характеристический многочлен должен делиться на $(x-i)^2$, а потому и на $(x+i)^2$, и на $(x-i)^2(x+i)^2 = (x^2+1)^2$. Значит, $n \geqslant 4$. С другой стороны, легко проверить, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

подходит: для каждой из них $\chi_A(x) = (x^2+1)^2$ и ранг $A - iE$ равен 1.

Задача 3. Найдите все неприводимые представления над полем $\mathbb{C}$ группы $G = \langle a \rangle_3 \rtimes \langle b \rangle_4$. Сколько их, каковы их размерности?

Ответ: 6 представлений: 4 одномерных и 2 двумерных. Заметим, что коммутант группы есть $\langle a \rangle$, а фактор по нему — циклическая группа порядка 4. Поэтому одномерные представления χ_k таковы: $a \mapsto 1, b \mapsto \sqrt[4]{1}$, где берётся одно из значений корня: $\sqrt[4]{1} = i^k$, $k = 0,1,2,3$. Заметим, что подгруппа $\langle b^2 \rangle \subset G$ нормальна, фактор G по ней изоморфен S_3. Представление S_3 движениями треугольника даёт двумерное неприводимое представление G, назовём его ρ. В явном виде:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}, \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Другое двумерное представление G можно получить как $\rho' = \rho \otimes \chi_1$. В явном виде:

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}, \qquad \rho'(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Других неприводимых представлений нет по формуле Бернсайда: $1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2 = 12 = |G|$.

Задача 4. Пусть V — неприводимое представление конечной группы G над $\mathbb{C}$. Чему может быть равна кратность вхождения тривиального представления в представление $V \otimes V$? Приведите примеры.

Ответ: 0 или 1. Действительно, искомая кратность равна размерности пространства $\mathrm{Hom}^G(\mathbb{C}, V\otimes V)$, которое изоморфно $\mathrm{Hom}^G(V^*, V)$. По лемме Шура, это пространство нулевое при $V^* \ncong V$ и одномерное при $V^* \cong V$ (речь идёт об изоморфизмах представлений).

Задача 5. Пусть A — оператор на векторном пространстве V над $\mathbb{C}$. Обозначим соответствующий $\mathbb{C}[t]$-модуль через (V, A). При каких значениях $a \in \mathbb{C}$ тензорное произведение

$$\left(\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \left(\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

равно нулевому модулю?

Ответ: При всех a, кроме $1/2$ и $5/3$. Заметим, что

$$(\mathbb{C}, \lambda) \otimes (\mathbb{C}, \mu) \cong \mathbb{C}[t]/(t-\lambda) \otimes \mathbb{C}[t]/(t-\mu) \cong \mathbb{C}[t]/(t-\lambda, t-\mu).$$

Это равно 0 титтк $\lambda \neq \mu$. Первый оператор диагонализируем, его собственные значения — 1 и 2. Соответственно, первый модуль есть $(\mathbb{C}, 1) \oplus (\mathbb{C}, 2)$. Значит, искомое тензорное произведение равно нулю титтк 1 и 2 не являются собственными значениями второго оператора. Подставляя 1 и 2 в характеристический многочлен второго оператора, находим ответ.

Задача 6. При каком наибольшем k существуют оператор $F \in L(\mathbb{R}^2)$ и вектор $v \in \mathbb{R}^2$, для которых

$$\|v\| < \|F(v)\| > \left\|F^2(v)\right\| < \left\|F^3(v)\right\| < \left\|F^4(v)\right\| < \ldots < \left\|F^k(v)\right\|?$$

Здесь $\|\quad\|$ обозначает обычную евклидову норму.

Ответ: Существуют при любом k. Можно взять, например, $F = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $v = (2, 3)$.