НМУ
Алгебра 2

20 мая 2018

Экзамен

Задача 1. Для каждого $a \in \mathbb{Z}$ найдите степень поля разложения многочлена $(x^3-2)(x^2-a)$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 2. При каком наименьшем n существует матрица в $M_n(\mathbb{R})$, жорданова нормальная форма которой содержит клетку $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$? Приведите пример такой матрицы.

Задача 3. Найдите все неприводимые представления над полем $\mathbb{C}$ группы $G = \langle a \rangle_3 \leftthreetimes \langle b \rangle_4$. Сколько их, каковы их размерности?

Задача 4. Пусть V — неприводимое представление конечной группы G над $\mathbb{C}$. Чему может быть равна кратность вхождения тривиального представления в представление $V \otimes V$? Приведите примеры.

Задача 5. Пусть A — оператор на векторном пространстве V над $\mathbb{C}$. Обозначим соответствующий $\mathbb{C}[t]$-модуль через (V, A). При каких значениях $a \in \mathbb{C}$ тензорное произведение

$$\left(\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right) \otimes_{\mathbb{C}[t]} \left(\mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

равно нулевому модулю?

Задача 6. При каком наибольшем k существуют оператор $F \in L(\mathbb{R}^2)$ и вектор $v \in \mathbb{R}^2$, для которых

$$\|v\| < \|F(v)\| > \left\|F^2(v)\right\| < \left\|F^3(v)\right\| < \left\|F^4(v)\right\| < \ldots < \left\|F^k(v)\right\|?$$

Здесь $\| \quad \|$ обозначает обычную евклидову норму.

Продолжительность экзамена 4 часа. Можно пользоваться любыми своими материалами. Интернетом пользоваться нельзя. Удачи!