1. Пусть $f \in Hol(\overline{G})$, где G — некоторая жорданова область, пусть f непостоянна в G, и пусть модуль f имеет одно и то же значение на ∂G. Доказать, что однолистность f в G эквивалентна ее локальной однолистности в G.

2. Пусть $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < +\infty$. Доказать, что любая голоморфная ветвь функции $\sqrt[n]{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ однолистна в $\mathbb{C}_+$.

3. Показать, что функция ze^{-z} однолистна в круге $\mathbb{D}$, но ни в каком большем круге с центром в точке $z = 0$.

•4. Пусть G — жорданова область в $\mathbb{C}$, а f — некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на G. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется однолистный в круге $\mathbb{D}$ многочлен P такой, что $\|f - P\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon$.

•5. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1$. Доказать, что функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на некоторую жорданову область.

6. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция f мероморфна в области G. а) Доказать, что если при отображении $z \mapsto f(z)$ образом любого отрезка, лежащего в области G, является отрезок, то f — линейная функция. б) Доказать, что если при отображении $z \mapsto f(z)$ образом любого отрезка, лежащего в области G, является отрезок или дуга окружности, то f — ДЛО.

•7. а) Найти все кольца вида $\{\rho_1 < |z| < \rho_2\}$, конформно эквивалентные данному кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leqslant r < R < \infty$. б) Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

8. Доказать, что любой конформный изоморфизм одного прямоугольника на другой прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

•9. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{T}$ — дуга единичной окружности. Доказать, что если $f \in Hol(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D} \cup \Gamma)$ и $f|_{\Gamma} = 0$, то $f \equiv 0$.

10. Пусть функция $g(z; z_1, z_2, z_3)$ конформно отображает полукруг $\Omega := \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на тот же самый полукруг с соответствием границ $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = i$, $g(z_3) = -1$, где z_1, z_2, z_3 — точки на $\partial\Omega$ При каких условиях на точки z_1, z_2, z_3 это конформное отображение продолжается до конформного отображения круга $\mathbb{D}$ на круг $\mathbb{D}$ с разрезами по отрезкам $[-1, -\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$?