•1. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ такой, что множество $\mathbb{C} \setminus K$ не связно, а $0 \in \widehat{K} \setminus K$. Доказать, что функция $1/z$ не может быть равномерно на K приближена комплексными многочленами.

•2. Доказать, что для любой функции $f \in Hol(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ найдется последовательность многочленов комплексного переменного $\{P_n\}$ такая, что $P_n \to f$ равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$ при $n \to \infty$. Доказать аналогичное утверждение в случае, когда вместо $\mathbb{D}$ рассматривается ограниченная область G, звездообразная относительно какой-либо точки $a \in G$.

3. Пусть $g \in C^1(\mathbb{C})$, причем $\operatorname{Supp}(\overline{\partial} g)$ — компакт и пусть

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\overline{\partial} g(\zeta)\, dm_2(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Доказать, что $g - F \in Hol(\mathbb{C})$, и что $g \equiv F$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$.

•4. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть $f \in Hol(G \setminus A) \cap C(\overline{G} \setminus A)$, где A — множество полюсов функции f в G. Доказать, что для любого $a \in \mathbb{C}$, $|a| > \|f\|_{\partial G}$, верно равенство $Z_{(f-a)}(G) = P_f(G)$.

•5. а) Найти число нулей многочлена $z^4 + z^3 - 4z + 1$ в кольце $1 < |z| < 3$. б) Найти число корней уравнения $z^3 + 2z^2 + 3z + 8 = 0$ в левой полуплоскости, в верхней полуплоскости, в полукруге $\{|z| < 4,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

6. Доказать, что уравнение $\operatorname{tg} z = z$ имеет только вещественные корни.

7. Пусть $f \in Hol(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ и $f(0) \neq 0$. Доказать, что существует такое $\rho > 0$, что для любого w с условием $0 < |w| < \rho$ уравнение $z^m = wf(z)$ имеет в $\mathbb{D}$ ровно m различных корней.

8. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$, а $f \in Hol(G \setminus A) \cap C(\overline{G} \setminus A)$, где $A \subset G$ — конечное множество полюсов f. Доказать, что если $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$ при $z \in \partial G$, то $Z_f(G) = P_f(G)$.

9. Пусть $a_n > \cdots > a_1 > a_0 \geqslant 0$. Доказать, что функция $a_0 + a_1 \cos z + \cdots + a_n \cos(nz)$ имеет только вещественные нули.

10. Вывести принцип максимума модуля для голоморфных функций из принципа сохранения области.