•1. Найти все изолированные особые точки однозначного характера следующих функций и указать их тип. Чем является ∞ для этих функций:

$$\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}; \qquad e^{\operatorname{ctg}(\pi/z)}; \qquad \sin\left(e^{1/z}\right).$$

2. Пусть a — изолированная особая точка однозначного характера для функции f. Доказать, что если $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)||dz|=0$, то a — устранимая особая точка для f. Доказать, что если в некоторой окрестности точки a справедливо неравенство $|f(z)|\leqslant A|z-a|^{-m}$ при $A,m\geqslant 0$, то a — это полюс функции f порядка не выше, чем m, или устранимая особая точка.

3. Пусть a — изолированная особая точка однозначного характера для функции f. Доказать, что если $\operatorname{Re} f(z)>0$ в некоторой окрестности точки a, то a — устранимая особая точка функции f. Доказать, что если a — это не устранимая особая точка функции f, то в сколь угодно малой окрестности точки a функция $\operatorname{Re} f$ принимает все вещественные значения.

•4. Разложить функцию в ряд Лорана во всех подходящих кольцах с центром в точке a:

$$\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}, \quad a=1; \qquad \frac{e^z}{z(1-z)}, \quad a=0.$$

5. Пусть функции $f,g\in \mathit{Hol}(D(a,\varepsilon))$, $\varepsilon>0$ и пусть точка a является нулем порядка m, $m\in\mathbb{N}$, для функции f и нулем порядка $m+1$ для функции g. Показать, что

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{(m+1)f^{(m)}(a)}{g^{(m+1)}(a)}.$$

6. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ такие многочлены комплексного переменного, что $\deg P<\deg Q$, пусть $R(z)=P(z)/Q(z)$, и пусть $\{z_1,\dots,z_n\}$ — множество нулей многочлена Q (без учета кратности). Доказать, что справедлива формула

$$R(z)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{\zeta=z_k}\frac{R(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Показать, что эта формула представляет собой разложение R в сумму простейших дробей.

•7. Используя теорему Коши о вычетах вычислить интегралы:

$$\int_{|z|=3}\frac{z^2\sin^2\left(1/z\right)}{(z-1)(z-2)}dz; \qquad \int_{|z|=4}\frac{z^3dz}{e^{z^2}-1}; \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\vartheta}{13+12\sin\vartheta}.$$

•8. Используя теорему Коши о вычетах вычислить интегралы:

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{iax}}{x^2}dx; \qquad \int_0^1\frac{\sqrt{x(1-x)}dx}{(x+1)^3}; \qquad \int_0^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

Во всех случаях обосновать существование соответствующих интегралов и пояснить, каким образом применяется теорема Коши о вычетах.

9. Пусть $f\in \mathit{Hol}(\mathbb{D})$. а) Показать, что равенство $\lim\limits_{|z|\to 1-}|f(z)|=+\infty$ невозможно; б) показать, что для функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n z^{(2n)!}$ выполнено равенство $\limsup\limits_{r\to 1-}\inf\limits_{|z|=r}|f(z)|=+\infty$; в) показать, что всякая функция $f\in \mathit{Hol}(\mathbb{D})$, для которой выполнено $\limsup\limits_{r\to 1-}\inf\limits_{|z|=r}|f(z)|=+\infty$ принимает все свои значения бесконечное число раз.