•1. Доказать, что целая функция с периодами 1 и i постоянна.

•2. Найти круги сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^k z^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(2z-i)^n$. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{inz}$ сходится локально равномерно в верхней полуплоскости и расходится в нижней.

3. а) Проверить, что справедливо разложение $\frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}$, $|z| < |a|$, $a \neq 0$; б) разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ данные функции и найти радиус сходимости соответствующих рядов (в последнем выражении $\sqrt{z}$ и $\ln z$ — это главные значения корня и логарифма)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}; \qquad f(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}, \quad f(0) = 1.$$

4. Пусть $f \in Hol(\varepsilon\mathbb{D})$, $\varepsilon > 0$, такова, что $f(z) = z + f(z^2)$, а $f(0) = 0$. Показать, что $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Найти круг сходимости этого ряда и исследовать его сходимость на границе этого круга.

5. а) Найти на $\mathbb{T}$ все особые точки суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$. б) Доказать, что любая точка $z \in \mathbb{T}$ является особой точкой для суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

•6. Пусть $f \in Hol(\mathbb{D})$ и $f(0) = 0$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ сходится в $\mathbb{D}$.

7. Пусть $z_0 \neq 0$, а последовательность $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ такова, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - z_0 \right|^{1/n} < 1$. Доказать, что круг $D(0, |z_0|)$ — это круг сходимости степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, а функция f имеет на окружности $\partial D(0, |z_0|)$ единственную особую точку — полюс первого порядка в точке $z = z_0$.

•8. Существует ли голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция f такая, что а) $f(\pm 1/n) = 1/n^2$; б) $f(\pm 1/n) = 1/n^3$; в) $f(1/n) = 1/\sqrt{n}$; г) $f(1/n) = 1/2^n$.

9. Пусть $f \in Hol(\mathbb{C})$ и пусть для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ имеет хотя бы один нулевой коэффициент a_n. Доказать, что f — это многочлен.