Топология-3

Антон Айзенберг
ayzenberga@gmail.com

20 мая 2017 г.

Содержание

1 Напоминание и повторение

Пусть X, Y — топологические пространства, а R — кольцо коэффициентов.

Теорема 1.1 (Формула Кюннета для гомологий)**.** *Пусть X, Y — клеточные комплексы, а R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда существует естественная расщепимая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y)) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_i \mathrm{Tor}^R(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)) \to 0.$$

Теорема 1.2 (Формула Кюннета для когомологий)**.** *Пусть X, Y — клеточные комплексы, а R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда существует естественная расщепимая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y)) \to H^n(X \times Y) \to \bigoplus_i \mathrm{Tor}^R(H^i(X), H^{n-i+1}(Y)) \to 0.$$

Оба утверждения следуют из алгебраической формулы Кюннета и изоморфизма клеточных цепных комплексов: $\mathcal{C}_\bullet(X \times Y) \cong \mathcal{C}_\bullet(X) \otimes \mathcal{C}_\bullet(Y)$ (в случае когомологий, имеем аналогичный изоморфизм коцепных комплексов $\mathcal{C}^\bullet(X \times Y) \cong \mathcal{C}^\bullet(X) \otimes \mathcal{C}^\bullet(Y)$).

Следствие 1.3. *Если гомологии (соотв. когомологии) одного из пространств X, Y являются свободными модулями над R, то гомоморфизм $\bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y)) \to H_n(X \times Y)$ (соотв. $\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(Y)) \to H^n(X \times Y)$) является изоморфизмом. В частности, это верно, когда R — поле.*

Любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ и гомоморфизм когомологий, действующий в обратном направлении $f^*\colon H^n(Y) \to H^n(X)$ для любого n. Если $f, g\colon X \to Y$ — два гомотопных отображения, то $f_* = g_*$ и $f^* = g^*$. Поэтому говорят, что гомологии являются ковариантным гомотопическим функтором, а когомологии являются контравариантным гомотопическим функтором.

Диагональ $\Delta\colon X \to X \times X, \Delta(x) = (x, x)$ индуцирует гомомрфизм $\Delta^*\colon H^*(X \times X) \to H^*(X)$. Взяв композицию с гомоморфизмом $\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)) \to H^n(X \times X)$ из формулы Кюннета для когомологий, получим естественный гомоморфизм:

$$\bigoplus_i (H^i(X) \otimes H^{n-i}(X)) \to H^n(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^n(X).$$

Этот гомоморфизм задает на R-модуле когомологий $H^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X)$ умножение, превращая его в градуированную R-алгебру. Используя коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta \times \mathrm{id}_X} \\ X \times X & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times \Delta} & X \times X \times X \end{array}$$

и естественность отображения Кюннета, несложно показать, что введенная операция умножения ассоциативна. Естественное отображение $p\colon X \to \mathrm{pt}$ индуцирует отображение $p^*\colon R = H^0(\mathrm{pt}) \to H^0(X)$, которое определяет единицу $1_{H^*(X)} = p^*(1_R) \in H^0(X)$, т.е. такой элемент, что $1_{H^*(X)} \cdot a = a$ для любого $a \in H^*(X)$.

Замечание 1.4. Существует неформальная причина, почему мы не можем проделать то же самое с гомологиями. В гомологиях диагональ индуцирует отображение $\Delta_*\colon H_n(X) \to H_n(X \times X)$, а отображение из формулы Кюннета имеет вид $\bigoplus_i (H_i(X) \otimes H_{n-i}(X)) \to H_n(X \times X)$, так что состыковать их никак не получается.

Если предположить, что модуль $H_*(X)$ свободен, то отображение Кюннета можно обратить. Тогда, взяв композицию с Δ_* мы получим гомоморфизм $H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$. Такой гомоморфизм называется коумножением, и его наличие превращает $H_*(X)$ в коалгебру. Многие свойства алгебр можно перенести на коалгебры, однако с алгебрами работать все-таки проще и привычнее.

Операцию умножения можно определить по-другому, начиная с сингулярных коцепей. Определим $\smile$-произведение сингулярных коцепей $a \in C^p(X)$, $b \in C^q(X)$ как коцепь $a \smile b$ значение которой на сингулярном симплексе $\sigma\colon \Delta^{p+q} = [v_0, \ldots, v_{p+q}] \to X$ задается формулой

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0, \ldots, v_p]}) \cdot b(\sigma|_{[v_p, \ldots, v_{p+q}]}).$$

Коциклы образуют подалгебру в алгебре $(C^*(X), \smile)$, а кограницы — идеал в этой подалгебре, значит $\smile$-умножение корректно определено на сингулярных когомологиях. Известно, что $a \smile b = (-1)^{pq} b \smile a$ для любых $a \in H^p(X)$, $b \in H^q(X)$ (это свойство называется градуированной коммутативностью). Наконец, $\smile$-умножение в $H^*(X)$ совпадает с умножением, введенным ранее при помощи гомоморфизма Кюннета.

Вывод 1.5. $H^*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X; R)$ *является градуированной градуированно-коммутативной ассоциативной алгеброй над* R *с единицей. Отображение* $f\colon X \to Y$ *индуцирует гомоморфизм алгебр* $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$.

Пример 1.6. $H^*(T^n) \cong \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\deg \alpha_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

$H^*(S^n) \cong R[u]/(u^2)$, $\deg u = n$.

$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$, $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]$, $\deg u = 1$.

$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]$, $\deg u = 2$.

$H^*(M_g; \mathbb{Z})$ порождено одномерными классами $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, и соотношениями $a_i a_j = b_i b_j = 0$ при всех i, j, $a_i b_j = 0$ при $i \neq j$ и $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \ldots = a_g b_g$.

Замечание 1.7. Умножение в когомологиях является дополнительной структурой, а когомологии, рассматриваемые как градуированная алгебра, являются более сильным инвариантом, чем когомологии рассматриваемые лишь как градуированный R-модуль. Например, когомологии пространств T^2 и $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ изоморфны как R-модули, но не изоморфны как алгебры (упражнение).

Замечание 1.8. Пространство (клеточный комплекс) X связно в том и только том случае, когда $H^0(X) \cong R$. Назовем градуированную алгебру $A^* = \bigoplus_{j \geqslant 0} A^j$ над кольцом R связной, если $A^0 \cong R$. Получаем, что пространство связно тогда и только тогда, когда его алгебра когомологий связна.

Упражнение 1.9. Докажите, что существует естественная гомотопическая эквивалентность $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee X * Y$. Если R — поле, то $\widetilde{H}_n(X * Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=n-1} \widetilde{H}_i(X; R) \otimes \widetilde{H}_j(Y; R)$.

Упражнение 1.10. Описать кольцо когомологий поверхности M_g (сферы с g ручками). Указание: построить отображение из M_g в букет g копий двумерного тора.

Упражнение 1.11. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Тогда гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_1(X) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ сюръективен, и его ядро совпадает с коммутантом группы $\pi_1(X)$. Иными словами, группа $H_1(X; \mathbb{Z})$ есть абелианизация группы $\pi_1(X)$.

Упражнение 1.12. Пусть X, Y — связные CW-комплексы с отмеченными точками. Докажите, что $H^i(X \vee Y) \cong H^i(X) \oplus H^i(Y)$ при $i \geqslant 1$, а произведение когомологических классов $\phi \in H^i(X) \subset H^i(X \vee Y)$ и $\psi \in H^j(Y) \subset H^j(X \vee Y)$ равно нулю при $i, j \geqslant 1$.

2 Многообразия

В целях мотивации приведем результат, к которому (в числе прочих) мы будем стремиться.

Связная градуированная алгебра (ассоциативная, градуированно-коммутативная с единицей) $A^* = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j$ над полем R называется алгеброй Пуанкаре формальной размерности n, если $A^j = 0$ при $j > n$, $A^n \cong R$ и билинейное спаривание $\times\colon A^j \otimes A^{n-j} \to A^n \cong R$ является невырожденным.

Утверждение 2.1. *Пусть X — замкнутое связное ориентируемое многообразие, $\dim X = n$, а R — поле. Тогда $H^*(X)$ является алгеброй Пуанкаре формальной размерности n.*

Это утверждение дает сильное ограничение на возможный вид когомологий многообразий.

2.1 Топологические многообразия

Определения

Определение 2.2. Хаусдорфово паракомпактное[1] пространство X называется топологическим многообразием (соотв. многообразием с краем) размерности n, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность гомеоморфная открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}^n$ (соотв. открытому подмножеству $V \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$).

Определение 2.3. Пусть X — многообразие с краем. Множество точек $x \in X$, для которых не существует окрестности, гомеоморфной открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$, называется краем и обозначается ∂X.

Замкнутым многообразием называется компактное многообразие без края.

Примеры многообразий у нас уже встречались: $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$. Примеры многообразий с краем: D^n, полноторие (их края — S^2 и T^2 соответственно). Примеры не многообразий: графы с вершинами степени больше 2, бесконечномерные клеточные комплексы (такие как $\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty$), книга с тремя страницами. Все дальнейшие определения будут формулироваться для многообразий без края, хотя их можно без труда распространить на многообразия с краем.

Пусть U — окрестность точки $x \in X$ и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм на подмножество $\mathbb{R}^n$, существующий по определению. Подмножество U (вместе с фиксированным гомеоморфизмом φ) называется картой на многообразии X. Множество карт U_α, $\alpha \in A$, покрывающее все многообразие X, называется атласом на X.

Предложение 2.4. *Пусть X — топологическое многообразие размерности n и $x \in X$. Тогда $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$ при $j \neq n$ и $H_n(X, X\backslash x; R) \cong R$.*

[1] Паракомпактность: в любое открытое покрытие можно вписать локально конечное подпокрытие. Локально конечное покрытие: для любой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия

Доказательство. По определению топологического многообразия, у точки $x \in X$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству $\mathbb{R}^d$. Выберем в этой окрестности маленький открытый шарик B, содержащий x и пусть $Z = X \backslash B$. Тогда, по свойству вырезания, $H_j(X, X\backslash x; R) \cong H_j(X\backslash Z, (X\backslash x)\backslash Z; R) = H_j(B, B\backslash x; R)$. Поскольку шарик B стягиваем, из точной последовательности пары

$$\cdots \to \widetilde{H}_j(B; R) \to H_j(B, B\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; R) \to \widetilde{H}_{j-1}(B; R) \to \cdots$$

заключаем, что $H_j(B, B\backslash x; R) \cong \widetilde{H}_{j-1}(B\backslash x; R)$. Пространство $B\backslash x$ гомотопически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере, а значит его приведенные гомологии тривиальны в размерностях $j \neq n-1$ и изоморфны R в размерности $n-1$. Значит $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$, при $j \neq n$, и $H_n(X, X\backslash x; R) = R$. □

Замечание 2.5. Приведенное рассуждение должно убедить в справедливости следующего факта: группы $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ описывают свойства пространства X в сколь угодно малой окрестности точки x (т.е. локальные свойства). Поэтому часто группу $H_*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ называют группой локальных гомологий (а $H^*(X, X\backslash x; \Bbbk)$ — локальными когомологиями).

Определение 2.6. Паракомпактное хаусдорфово пространство X называется гомологическим многообразием (над группой R) размерности n, если $H_j(X, X\backslash x; R) = 0$ при $j \neq n$ и $H_n(X, X\backslash x; R) \cong R$ для любой точки $x \in X$.

Таким образом, гомологические многообразия — более широкий класс пространств, нежели топологические многообразия.

Упражнение 2.7. Доказать, что $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ — топологические многообразия. Доказать, что D^n, полноторие — многообразия с краем, а их края — S^2 и T^2 соответственно.

Упражнение 2.8. Если X, Y — топологические многообразия, то $X \times Y$ — топологическое многообразие. Если хотя бы одно из них имеет край, то $X \times Y$ — также многообразие с краем $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y \cup X \times \partial Y \subset X \times Y$.

Ориентация Хотя многие факты верны и для гомологических многообразий (в предположении, что они триангулируемы), мы для простоты ограничимся топологическими многообразиями.

Определение 2.9. Локальной ориентацией α_x в точке $x \in X$ называется образующая группы локальных гомологий $H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Образующую группы $\mathbb{Z}$ можно выбрать двумя способами. Значит, в каждой точке топологического многообразия есть две возможных локальных ориентации. Допустим, что точки $x, y \in X$ близки, то есть лежат в одной карте и их можно накрыть замкнутым евклидовым шаром B. Имеем естественные изоморфизмы

$$H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}) \xleftarrow{\cong} H_n(X, X\backslash B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X\backslash y; \mathbb{Z}),$$

индуцированные вложениями пар $(X, X\backslash B) \to (X, X\backslash x)$ и $(X, X\backslash B) \to (X, X\backslash y)$. Ориентации α_x, α_y в близких точках x, y называются согласованными, если они при этих изоморфизмах переходят друг в друга. Многообразие называется ориентируемым, если существует согласованный выбор ориентаций во всех точках (а сам этот выбор называется ориентацией многообразия).

Предложение 2.10. *Пусть X — замкнутое связное многообразие размерности n. Тогда*

1. *Гомоморфизм $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \to H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z}_2)$ является изоморфизмом для всех $x \in X$.*

2. *Если X — ориентируемо, то $H_n(X; \mathbb{Z}) \to H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z})$ является изоморфизмом для всех $x \in X$. Если X — неориентируемо, то $H_n(X; \mathbb{Z}) = 0$.*

3. *$H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. В доказательстве мы полагаем, что группа коэффициентов R есть $\mathbb{Z}$ для ориентированного случая, и $\mathbb{Z}_2$ для произвольного. Удобно доказать более общее утверждение.

Лемма 2.11. *Пусть $A \subset X$ — компактное подмножество. Тогда*

1. *$H_i(X, X\backslash A; R) = 0$ при $i > n$. Класс $\alpha \in H_n(X, X\backslash A; R)$ равен нулю тогда и только тогда, когда его образ в $H_n(X, X\backslash x; R)$ равен нулю при всех $x \in A$.*

2. *Для любого набора согласованных ориентаций α_x, $x \in A$, существует единственный элемент $\alpha \in H_n(X, X\backslash A; R)$, чей образ в $H_n(X, X\backslash x; R)$ есть α_x при всех $x \in A$.*

Доказательство леммы. (1) Вначале докажем, что если Лемма верна для компактных подмножеств A, B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Запишем точную последовательность Майера–Вьеториса (относительную версию):

$$0 \to H_n(X, X\backslash A \cup B) \xrightarrow{\Phi} H_n(X, X\backslash A) \oplus H_n(X, X\backslash B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X, X\backslash A \cap B)$$

(слева стоит 0, поскольку мы предположили, что $H_{n+1}(X, X\backslash A \cap B) = 0$). При $j > n$ по предположению имеем $H_j(X, X\backslash A \cap B) = H_j(X, X\backslash A) = H_j(X, X\backslash B) = 0$, а значит группа $H_j(X, X\backslash A \cup B)$ оказывается зажата между двумя нулями, т.е. $H_j(X, X\backslash A \cup B)$. Пусть $\alpha \in H_n(X, X\backslash A \cup B)$ — такой элемент, что его образ $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x)$ равен нулю при всех $x \in A \cup B$. Тогда, по предположению, образы α в $H_n(X, X\backslash A)$ и $H_n(X, X\backslash B)$ равны нулю. Поскольку Φ инъективен, α сам равен нулю, что доказывает пункт (1) для $A \cup B$. Докажем пункт (2). Рассмотрим набор согласованных ориентаций α_x на $A \cup B$. По предположению, существует единственный такой элемент $\alpha_A \in H_n(X, X\backslash A)$, что его образ в $H_n(X, X\backslash x)$ есть α_x для всех $x \in A$. Аналогично, существует единственный такой элемент $\alpha_B \in H_n(X, X\backslash B)$, что его образ в $H_n(X, X\backslash x)$ есть α_x для всех $x \in B$.

Гомоморфизм Ψ посылает пару $(\alpha_A, \alpha_B) \in H_n(X, X \backslash A) \oplus H_n(X, X \backslash B)$ в разность $\beta = \alpha_A|_{A \cap B} - \alpha_B|_{A \cap B} \in H_n(X, X \backslash A \cap B)$. Образ β в группе $H_n(X, X \backslash x)$ равен нулю для любого $x \in A \cap B$, и следовательно, поскольку Лемма выполнена для $A \cap B$, имеем $\beta = 0$. Из точности последовательности получаем, что (α_A, α_B) есть образ элемента $\alpha \in H_n(X, X \backslash A \cup B)$. Этот элемент обладает требуемыми свойствами и определен однозначно, поскольку Φ инъективен.

(2) Исходя из пункта (1), достаточно доказать Лемму для компактного подмножества, лежащего в одной карте (т.е. в $\mathbb{R}^n$). Действительно, любое компактное подмножество можно представить в виде конечного объединения k компактных подмножеств, каждое из которых целиком лежит в какой-то карте. Далее индукция по числу k и применение шага (1). Заметим, что если A — компактное подмножество, лежащее в карте U, то $H_j(X, X \backslash A) \cong H_j(U, U \backslash A)$ по свойству вырезания. Значит дальше можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

(3) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — конечный симплициальный комплекс, чьи симплексы линейно вложены в $\mathbb{R}^n$. В этом случае лемма следует по индукции: достаточно доказать ее для одного симплекса и применить шаг (1). Заметим, что справедливость леммы для симплекса следует из определения согласованных ориентаций.

(4) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Допустим, класс $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A)$ представлен относительным циклом z, и пусть $C \subset \mathbb{R}^n \backslash A$ обозначает объединение образов всех сингулярных циклов, встречающихся в ∂z. Множества A и C компактны, значит между ними ненулевое расстояние $\delta > 0$. Покроем множество A конечным кусочно линейным комплексом K, не пересекающим C, следующим образом: (а) покроем A большим симплексом, (б) возьмем кратное барицентрическое подразбиение симплекса, у которого диаметр каждого кусочка меньше δ (в) возьмем все симплексы, пересекающие A. Все та же цепь z определяет элемент $\alpha_K \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash K)$, чье ограничение на $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A)$ совпадает с α. Из шага (3) следует, что $\alpha_K = 0$, если $i > n$. Значит, $\alpha = 0$, и, как следствие, $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A) = 0$ при $i > n$.

Пусть теперь $i = n$. Допустим, что ограничение $\alpha_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x)$ равно нулю при всех $x \in A$. Тогда, на самом деле $\alpha_x = 0$ при всех $x \in K$ (здесь рассматриваются ограничения элемента $\alpha_K \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash K)$). Это следует из того, что гомоморфизм $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \Delta) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash x)$ является изоморфизмом для любого линейного симплекса Δ и точки x в нем. Поскольку $\alpha_x = 0$ для любого $x \in K$, из шага (3) следует, что $\alpha_K = 0$. Значит, $\alpha = 0$, что доказывает пункт 1 и единственность в пункте 2 Леммы. Существование доказывается просто: пусть α_x — согласованный набор локальных ориентаций для $x \in A$. Тогда его можно продолжить до согласованного набора ориентаций на достаточно большом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, содержащем множество A. Для шара существование "накрывающего" элемента $\alpha_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash B)$ очевидно (из определения согласованных ориентаций). Образ элемента α_B в группе $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash A)$ есть искомый класс α. $\square$

Предложение следует из леммы, если мы положим $A = X$. $\square$

Элемент группы $H_n(X; R)$, чей образ в $H_n(X, X \backslash x; R)$ является образующей при всех $x \in X$, называется фундаментальным классом замкнутого многообразия X. Фундаментальный класс часто обозначается через $[X]$. Если на X фиксирована ориентация (т.е. согласованный выбор $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x, \mathbb{Z})$), то существует единственный фундаментальный класс $[X] \in H_n(X; \mathbb{Z})$, который переходит в α_x при всех $x \in X$. Таким образом, выбрать ориентацию на связном ориентируемом многообразии X — это все равно, что выбрать образующую группы $H_n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Упражнение 2.12. Если X — некомпактное связное многообразие размерности n, то $H_j(X) = 0$ при всех $j \geqslant n$.

Пусть X — замкнутое многообразие размерности n. Рассмотрим множество $\widetilde{X} = \{\alpha_x \mid x \in X\}$, где $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x; \mathbb{Z})$ — локальная ориентация в точке x. Введем на $\widetilde{X}$ топологию, базу которой образуют множества $\widetilde{B} = \{\alpha_x \mid x \in B\}$, где B — открытое подмножество в X, а α_x — набор согласованных на B локальных ориентаций.

Упражнение 2.13. (1) Докажите, что $\widetilde{X}$ — ориентируемое многообразие. (2) Отображение $\widetilde{X} \to X$, $\alpha_x \mapsto x$ является двулистным накрытием. (3) Пусть X связно. Тогда X ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{X}$ имеет две компоненты связности. (4) Если в $\pi_1(X)$ нет элементов порядка 2, то X ориентируемо. В частности, любое односвязное многообразие ориентируемо.

2.2 Двойственность Пуанкаре

Пусть X — произвольное топологическое пространство, а R — произвольное кольцо. По определению, модуль k-ых сингулярный коцепей есть двойственный модуль к модулю k-ых сингулярных цепей, т.е. $C^k(X; R) \cong \mathrm{Hom}(C_k(X; R), R)$. Таким образом, применяя k-мерную коцепь к k-мерной цепи, мы получаем число (т.е. элемент R). Это действие корректно опускается до групп (ко)гомологий: если $\phi \in H^k(X; R)$ и $\alpha \in H_k(X; R)$, то естественным образом определяется число $\phi(\alpha) \in R$. Иными словами, имеется естественный гомоморфизм $h\colon H^k(X; R) \to \mathrm{Hom}(H_k(X; R), R)$.

Оказывается, существует более общая операция, которая позволяет по k-мерному классу гомологий и l-мерному классу когомологий получить $(k-l)$-мерный класс гомологий.

Кэп-произведение Пусть $k \geqslant l \geqslant 0$. Определим R-билинейную операцию $\frown\colon C_k(X; R) \otimes C^l(X; R) \to C_{k-l}(X; R)$, называемую $\frown$-произведением (читается как “кэп-произведение”) следующим образом. Пусть $\sigma \in C_k(X; R)$, $\sigma\colon [v_0, \ldots, v_k] \to X$ — сингулярный симплекс, а $\phi \in C^l(X; R)$ — сингулярная коцепь. Тогда

$$\sigma \frown \phi = \phi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]})\sigma|_{[v_l,v_{l+1},\ldots,v_k]}.$$

Поскольку сингулярные симплексы образуют базис $C_k(X; R)$, по линейности это задает операцию $\frown\colon C_k(X; R) \otimes C^l(X; R) \to C_{k-l}(X; R)$.

Лемма 2.14. *$\partial(\sigma \frown \phi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \phi - \sigma \frown \delta\phi)$, где ∂ — гомологический дифференциал, а δ — когомологический дифференциал.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Следствие 2.15. *Кэп-произведение цикла и коцикла есть цикл. Кэп-произведение цикла и кограницы есть граница. Кэп-произведение границы и коцикла есть граница.*

Значит, корректно определено индуцированное билинейное отображение

$$\frown : H_k(X;R) \otimes H^l(X;R) \to H_{k-l}(X;R),$$

которое также называется кэп-произведением.

Для кэп-произведения выполнена "функториальность" в следующем смысле. Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывное отображение, а $f_*\colon H_*(X;R) \to H_*(Y;R)$, $f^*\colon H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$ — индуцированные отображения в гомологиях и когомологиях соответственно. Тогда выполнено

$$f_*(\alpha) \frown \phi = f_*(\alpha \frown f^*(\phi)), \tag{2.1}$$

при $\alpha \in H_k(X;R)$ и $\phi \in H^l(Y;R)$.

По тем же формулам можно определить относительные аналоги кэп-произведения

$$H_k(X,A;R) \otimes H^l(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X,A;R);$$

$$H_k(X,A;R) \otimes H^l(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_{k-l}(X;R).$$

Отображение двойственности Пуанкаре Теперь мы возвращаемся к ситуации, когда X — многообразие. Как и ранее, мы полагаем, что либо $R = \mathbb{Z}$ и многообразие X ориентируемо, либо $R = \mathbb{Z}_2$ и X произвольно.

Теорема 2.16 (Изоморфизм двойственности Пуанкаре)**.** *Пусть X — замкнутое n-мерное многообразие, имеющее фундаментальный класс $[X] \in H_n(X;R)$. Отображение $D\colon H^k(X;R) \to H_{n-k}(X;R)$, $D(\phi) = [X] \frown \phi$ является изоморфизмом при всех k.*

Доказательство будет дано в схематичном и урезанном виде (полностью его можно прочитать в [5]). Идея такая же, как и для Утверждения 2.10: (1) вначале мы сформулируем более общее утверждение, описывающее свойства произвольного открытого подмножества $A \subset X$; (2) Теорема 2.16 будет частным случаем утверждения, если положить $A = X$; (3) аргумент, использующий последовательность Майера–Вьеториса сведет утверждение к случаю, когда A лежит в одной карте; (4) останется доказать утверждение в случае $A \subset \mathbb{R}^n$.

Заметим, что открытое подмножество $A \subset X$ является многообразием, но уже не замкнутым, поэтому нам нужно модифицировать утверждение так, чтобы они имело смысл для произвольных многообразий. Для этого требуется ввести понятие когомологий с компактным носителем.

Определение 2.17. Пусть X — произвольное топологическое пространство. Коцепь $a \in C^i(X;R)$ называется коцепью с компактным носителем, если существует такое компактное подмножество $K \subset X$, что a принимает нулевое значение на сингулярных симплексах с образами в $X \backslash K$. Рассмотрим подгруппу $C^i_c(X;R) \subset C^i(X;R)$, порожденную коцепями с компактным носителем. Легко проверить, что $a \in C^i_c(X;R)$ влечет $\delta a \in C^{i+1}_c(X;R)$, а значит определен дифференциальный комплекс

$$0 \to C^0_c(X;R) \xrightarrow{\delta} C^1_c(X;R) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^i_c(X;R) \xrightarrow{\delta} C^{i+1}_c(X;R) \xrightarrow{\delta} \cdots .$$

Его когомологии называются когомологиями с компактными носителями и обозначаются $H^i_c(X;R)$.

Замечание 2.18. Из определения очевидно, что для компактного пространства X выполнено $H^*_c(X;R) = H^*(X;R)$.

Замечание 2.19. $H^i_c(X;R)$ является прямым пределом групп $H^i_c(X, X\backslash K;R)$ по всем компактным подмножествам $K \subset X$. Отсюда можно заключить, например, что $H^i_c(\mathbb{R}^n;R) = 0$ при $i \neq n$ и $H^n_c(\mathbb{R}^n;R) = R$. Видно, что для некомпактных пространств когомологии с компактными носителями могут не совпадать с обычными.

Пусть X — n-мерное многообразие без края. Для любого компактного подмножества $C \subset X$ имеем кэп-произведение:

$$H_n(X, X\backslash C;R) \otimes H^k(X, X\backslash C;R) \xrightarrow{\frown} H_{n-k}(X;R).$$

По Лемме 2.11, в группе $H_n(X, X\backslash C;R)$ есть выделенный элемент α_C, который отображается в ориентацию $\alpha_x \in H_n(X, X\backslash x;R)$ при всех $x \in C$. Значит, можно рассмотреть гомоморфизм

$$D_{X,C} \colon H^k(X, X\backslash C;R) \to H_{n-k}(X;R), \quad D_{X,C}(\phi) = \alpha_C \frown \phi.$$

Используя функториальность кэп-произведения (в смысле (2.1)), и тот факт, что α_{C_1} переходит в α_{C_2} при $C_2 \subset C_1$, мы можем перейти к пределу гомоморфизмов $D_{X,C}$ по всем компактным подмножествам $C \subset X$. В итоге получим гомоморфизм

$$D_X \colon H^k(X;R) \to H_{n-k}(X;R).$$

Легко проверить, что в случае, когда X компактно, этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом двойственности Пуанкаре D, определенным ранее.

Предложение 2.20 (Двойственность Пуанкаре для произвольных многообразий)**.** *Пусть X — n-мерное многообразие без края, возможно некомпактное. Отображение $D_X \colon H^k_c(X;R) \to H_{n-k}(X;R)$ является изоморфизмом.*

Лемма 2.21. *Пусть многообразие X представлено в виде объединения двух открытых подмножеств A, B. Тогда диаграмма двух последовательностей Майера–Вьеториса*

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^k_c(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "D_{A\cap B}"] & H^k_c(A)\oplus H^k_c(B) \arrow[r] \arrow[d, "D_A\oplus -D_B"] & H^k_c(X) \arrow[r] \arrow[d, "D_X"] & H^{k+1}_c(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "D_{A\cap B}"] & {} \\
\arrow[r] & H_{n-k}(A\cap B) \arrow[r] & H_{n-k}(A)\oplus H_{n-k}(B) \arrow[r] & H_{n-k}(X) \arrow[r] & H_{n-k-1}(A\cap B) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знаков.

Из этой леммы и леммы о пяти изоморфизмах, получаем, что если D_A, D_B, $D_{A\cap B}$ — изоморфизмы, то $D_{A\cup B}$ — также изоморфизм.

Лемма 2.22. *Пусть X есть объединение вполне упорядоченной цепочки открытых множеств A_α. Если D_{A_α} является изоморфизмом при всех α, то D_X также является изоморфизмом.*

Лемма 2.23. *Если A — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, D_A является изоморфизмом.*

Из этих лемм (которые мы доказывать не будем, см. [5]) следует доказательство утверждения 2.20. Действительно, пусть X — произвольное многообразие. Рассмотрим совокупность $\mathcal{M}$ всех открытых подмножеств $A \subset X$, для которых D_A — изоморфизм. $\mathcal{M}$ частично упорядочено по включению, и вместе с любой возрастающей цепочкой содержит ее верхнюю границу (по Лемме 2.22). Значит, по лемме Цорна, существует максимальный элемент $A_{\max} \in \mathcal{M}$. Если $A_{\max} = X$, то все доказано. Если нет, то выберем точку $x \in X$, $x \notin A_{\max}$ и рассмотрим малую окрестность $U \ni x$, лежащую в карте. По Лемме 2.23 $U \in \mathcal{M}$ и $U \cap A_{\max} \in \mathcal{M}$. Значит, по Лемме 2.21, $U \cup A_{\max} \in \mathcal{M}$, что противоречит максимальности $A_{\max}$.

2.3 Кольцо когомологий замкнутого многообразия

Лемма 2.24. *Для любого $\alpha \in C_{k+l}(X;R)$, $\phi \in C^k(X;R)$ и $\psi \in C^l(X;R)$ имеем*

$$\psi(\alpha \frown \phi) = (\psi \smile \phi)(\alpha).$$

Доказательство. Упражнение. □

Упражнение 2.25. Пусть $\epsilon \colon H_0(X;R) \to R$ — гомоморфизм аугментации. Тогда $\epsilon(\alpha \frown \phi) = \phi(\alpha)$ для любых $\alpha \in C_k(X;R)$ и $\phi \in C^k(X;R)$.

Кэп- и кап-произведения опускаются на уровень (ко)гомологий. В итоге имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H^l(X;R) & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}(H_l(X;R),R) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \phi\smile} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\frown\phi)^*} \\
H^{k+l}(X;R) & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}(H_{k+l}(X;R),R)
\end{array}$$

Предложение 2.26. *Пусть X — связное замкнутое многообразие (как и ранее, мы предполагаем, что либо X ориентируемо, и $R = \mathbb{Z}$ или поле, либо X произвольное, а $R = \mathbb{Z}_2$). Тогда*

1. *Гомоморфизм $\int_X \colon H^n(X;R) \to R$, $\int_X(\phi) = \phi([X])$ является изоморфизмом.*

2. *Билинейное спаривание $H^k(X;R) \otimes H^{n-k}(X;R) \to R$, $\phi \otimes \psi \to \int_X(\phi \smile \psi)$ невырожденно (в случае $R = \mathbb{Z}$ нужно факторизовать конечное кручение).*

Доказательство. (1) Гомоморфизм $\int_X : H^n(X;R) \to R$ совпадает с композицией изоморфизма двойственности Пуанкаре $D: H^n(X;R) \to H_0(X;R)$ и гомоморфизма аугментации $H_0(X;R) \to R$ (см. упр.2.25). Аугментация является изоморфизмом, поскольку X связно.

(2) Рассмотрим композицию гомоморфизмов

$$H^k(X;R) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_k(X;R),R) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}(H^{n-k}(X;R),R).$$

Из леммы 2.24 имеем $D^* \circ h(\phi) = \phi \smile \cdot$. По теореме об универсальных коэффициентах, h является изоморфизмом (над полем, либо над $\mathbb{Z}$ с факторизованным кручением). D^* является изоморфизмом по теореме о двойственности Пуанкаре. Таким образом, билинейное спаривание $H^k(X;R) \otimes H^{n-k}(X;R) \xrightarrow{\smile} H^n(X;R)$ невырожденно по первому аргументу, а значит и по второму, поскольку $\smile$ — кососоммутативно. Остальное следует из п.(1). $\square$

Мы, наконец, доказали Утверждение 2.1.

2.4 Двойственность Пуанкаре через триангуляции

Фундаментальный класс В этом разделе мы научимся понимать ориентации и изоморфизм $H^k(X;R) \cong H_{n-k}(X;R)$ более наглядным способом: в терминах триангуляций и двойственных клеточных разбиений.

Лемма 2.27. *Пусть K — триангуляция (гомологического) многообразия размерности n. Тогда все максимальные по включению симплексы K имеют размерность n, и каждый $(n-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух n-мерных.*

Доказательство. Пусть I — максимальный по включению симплекс K, а x — точка, лежащая в его внутренности I°. Пусть I имеет размерность s. Тогда, поскольку внутренность I есть открытое подмножество s-мерного пространства, имеем

$$H_j(X, X\backslash x; R) \cong H_j(I^\circ, I^\circ\backslash x; R) \cong \begin{cases} R, & \text{если } j = s; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из того, что K есть n-мерное многообразие, заключаем, что $s = n$.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть x — точка, лежащая в относительной внутренности $(n-1)$-мерного симплекса J. Допустим, J содержится в k максимальных симплексах $I_1, \ldots, I_k$. Пусть $i_j \in I_j$ — вершина симплекса, не лежащая в грани J для каждого $j = 1, \ldots, k$. Имеем

$$\begin{aligned} H_n(X, X\backslash x; R) &\cong H_n(I_1 \cup \cdots \cup I_k, I_1 \cup \cdots \cup I_k\backslash x; R) \cong \\ &\cong \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \cdots \cup I_k\backslash x; R) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\partial J * \{i_1, \ldots, i_k\}; R) \cong \widetilde{H}_0(\{i_1, \ldots, i_k\}; R) \cong R^{k-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

В первом изоморфизме мы воспользовались свойством вырезания (вырезали дополнение до $I_1 \cup \dots \cup I_r$). Второй изоморфизм следует из точной последовательности пары

$$\widetilde{H}_n(I_1 \cup \dots \cup I_r; R) \to H_n(I_1 \cup \dots \cup I_r, I_1 \cup \dots \cup I_r \backslash x; R) \to \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \dots \cup I_r \backslash x; R) \to \widetilde{H}_{n-1}(I_1 \cup \dots \cup I_r; R)$$

и того факта, что $I_1 \cup \dots \cup I_r$ стягиваемо. Третий изоморфизм следует из того, что $I_1 \cup \dots \cup I_r \backslash x$ стягивается на $\partial J * \{i_1, \dots, i_k\}$. Четвертый изоморфизм есть $(n-1)$-кратное применение изоморфизма надстройки. Последний изоморфизм есть явное вычисление.

По определению гомологического многообразия имеем $H_n(X, X \backslash x; R) \cong R$. Значит $r = 2$. □

Замечание 2.28. Понятно, что для того, чтобы получить окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ необходимо в каждом $(n-1)$-симплексе состыковать ровно 2 n-мерных симплекса — ни больше, ни меньше. Приведенное хитрое рассуждение с гомологиями нужно скорее для тренировки умения работать с гомологиями. Кроме того, оно понадобится для решения задач.

Далее будем считать, что многообразие K ориентируемо и $R = \mathbb{Z}$ (случай произвольного многообразия и коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ полностью аналогичен). Фундаментальный класс многообразия K представляется симплициальной цепью $\sum_j k_j I_j$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, а I_j — максимальные симплексы. Выберем точку x во внутренности симплекса I_j. Из условия, что фундаментальный класс отображается в образующую группы $H_n(X, X \backslash x; \mathbb{Z}) \cong H_n(I, I \backslash x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, получаем, что соответствующий коэффициент k_j равен ± 1.

Цепь $\sum_j k_j I_j$ является симплициальным циклом. Значит, если два максимальных симплекса I_l, I_s соседствуют по $(n-1)$-мерному симплексу, то знак k_l определяет знак k_s и наоборот. Если многообразие K связно, то возможность согласованно выбрать знаки максимальных симплексов (в указанном смысле) эквивалентна ориентируемости. В этом случае выбор знаков максимальных симплексов эквивалентен выбору ориентации.

Замечание 2.29. В этом построении был замят под ковер один существенный факт. А именно, если K — связное многообразие, то от любого n-мерного симплекса к любому другому можно пройти “переходя через стенку размерности $n-1$”. Более строго, скажем, что симплициальный комплекс K (размерностно однородный, $\dim K = n$) сильно связен, если для любых двух максимальных симплексов I, I' существует цепочка $I = I_0, I_1, \dots, I_{s-1}, I_s = I'$ такая что симплексы I_j и I_{j+1} имеют общую грань размерности $n-1$ при $j = 0, 1, \dots, s-1$. Иными словами, любые две точки комплекса K можно соединить кривой, не пересекающей $(n-2)$-остов комплекса K.

Заметим, что вообще говоря существуют комплексы, которые связны, но не сильно связны, например букет двух сфер (рис.1). Утверждение, которое мы замяли, таково: связное триангулированное многообразие является сильно связным. Для топологических многообразий его можно объяснить так: любую кривую в $\mathbb{R}^n$ можно немного пошевелить так, чтобы она не пересекала заданное подмножество коразмерности 2. Значит, то же верно и для многообразия, и, следовательно, кривую, соединяющую две точки K, можно превратить в кривую, соединяющую их же и не пересекающую $(n-2)$-остов.

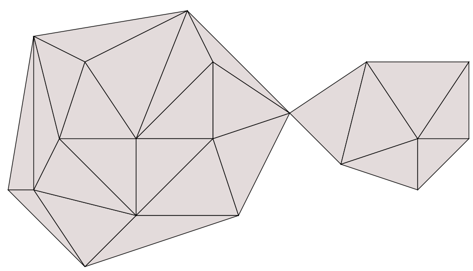

Рис. 1: Связный но не сильно связный симплициальный комплекс

Упражнение 2.30. Пусть K — триангуляция топологического (или гомологического) многообразия, $\dim K = n$, и пусть J — симплекс размерности k. Для каждого максимального симплекса I, содержащего J, рассмотрим его грань, противоположную J (т.е. грань, вершины которой не содержатся в J). Обозначим эту грань символом $I \backslash J$. Объединение симплексов $I \backslash J$ по всем I, содержащим J, называется линком симплекса J. Докажите, что

1. Линк является размерностно однородным пространством размерности $n - \dim\ J - 1$.

2. Линк имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim J - 1$.

3. Линк симплекса размерности $n-2$ гомеоморфен окружности.

4. Линк является гомологическим многообразием.

Упражнение 2.31. Используя предыдущее упражнение и индукцию, докажите, что триангуляция связного гомологического многообразия сильно связна.

Двойственное блочное разбиение Пусть K — триангуляция многообразия X. Определим барицентрическое подразбиение K' следующим образом. Пусть a_I — барицентр симплекса $I \in K$. Тогда k-мерные симплексы барицентрического подразбиения имеют вид $[a_{I_0}, a_{I_1}, \ldots, a_{I_k}]$, где $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_k$ — цепочки вложенных симплексов комплекса K. Для симплекса I определим подмножество $F_I \subset K'$ как объединение всех симплексов $[a_{I_0}, a_{I_1}, \ldots, a_{I_k}]$, для которых $I_0 \supseteq I$. Множество F_I называется блоком, двойственным к симплексу I. Определим также множество ∂F_I как объединение всех симплексов $[a_{I_0}, a_{I_1}, \ldots, a_{I_k}]$, для которых $I_0 \supsetneq I$.

Упражнение 2.32. Если X — многообразие размерности n, то $\dim F_I = n - \dim I$ и $\dim \partial F_I = n - \dim I - 1$. Симплекс I и двойственный блок F_I пересекаются по единственной точке — барицентру a_I симплекса I.

Упражнение 2.33. $I \subset J \Leftrightarrow F_J \subset F_I$. Граница ∂F_I является объединением блоков F_J по всем $J \supset I$. Объединение всех блоков есть K.

Упражнение 2.34. Докажите, что F_I — стягиваемо, а ∂F_I гомеоморфно линку симплекса I (см. упр.2.30). В частности, ∂F_I имеет гомологии как у сферы размерности $n - \dim I - 1$.

Упражнение 2.35. Пусть $k = \dim F_I$. Тогда $H_j(F_I, \partial F_j; R) = 0$ при $j \neq k$ и $H_k(F_I, \partial F_j; R) \cong R$.

Разбиение многообразия X на блоки F_I называется двойственным к триангуляции K блочным разбиением. Мы будем обозначать его через K^*.

Упражнения показывают, что двойственное разбиение K^* очень похоже на клеточное разбиение — за тем лишь исключением, что F_I могут не являться топологическими шарами. Однако они являются гомологическими шарами, и по разбиению многообразия X на блоки F_I можно построить "клеточные" гомологии — так же, как это делалось для настоящих клеточных разбиений. Этим мы сейчас и займемся.

Рассмотрим двойственную фильтрацию $K^0 \subset K^1 \subset \cdots \subset K^n = K^*$, где K^j есть объединение всех блоков F_I размерности $\leqslant j$. Определим группу $\mathcal{C}_j(K^*; R) = H_j(K^j, K^{j-1}; R) \cong \bigoplus_{\dim F_I = j} H_j(F_I, \partial F_I; R)$ при $j \geqslant 0$. Зададим дифференциал $\partial\colon \mathcal{C}_j(K^*; R) \to \mathcal{C}_{j-1}(K^*; R)$, как связывающий гомоморфизм

$$\partial_*\colon H_j(K^j, K^{j-1}; R) \to H_{j-1}(K^{j-1}, K^{j-2}; R)$$

из точной последовательности тройки (K^j, K^{j-1}, K^{j-2}). Тогда последовательность гомоморфизмов

$$\mathcal{C}_n(K^*; R) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{n-1}(K^*; R) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{C}_1(K^*; R) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0(K^*; R) \xrightarrow{d} 0$$

является дифференциальным комплексом. Точно так же, как это делалось для клеточных комплексов, можно показать, что его гомологии $H_j(K^*; R)$ изоморфны сингулярным гомологиям $H_j(X; R)$.

Предложение 2.36. *Группы $\mathcal{C}^j(K; R)$ и $\mathcal{C}_{n-j}(K^*; R)$ изоморфны, и при этих изоморфизмах когомологический дифференциал разбиения K переходит в гомологический дифференциал разбиения K^*.*

Доказательство. Каждому симплексу I разбиения K однозначно соответствует двойственная клетка F_I двойственного разбиения K^*, причем, если $\dim I = j$, то $\dim F_I = n-j$, поэтому наличие изоморфизма между $\mathcal{C}^j(K; R)$ (группой, свободно порожденной функциями на j-мерных симплексах) и $\mathcal{C}_{n-j}(K^*; R)$ (группой, порожденной $(n-j)$-мерными блоками) очевидно.

Чтобы построить изоморфизм, уважающий дифференциалы, надо согласовать ориентации симплексов и блоков. Введем вспомогательное пространство. Пусть $G_I \subset K'$ есть объединение всех симплексов барицентрического подразбиения, содержащих барицентр a_I, а ∂G_I — его граница (т.е. объединение всех симплексов в G_I, которые не содержат a_I). Имеем $G_I = \operatorname{Cone} \partial G_I$ и $G_I \cong \partial I * \partial F_I$. Ориентацией симплекса I, $\dim I = j$

называется образующая s_I группы $H_j(I, \partial I)$. Ориентацией блока F_I, $\dim F_I = n - j$ называется образующая t_{F_I} группы $H_{n-j}(F_I, \partial F_I)$. Скажем, что ориентации s_I и t_{F_I} согласованны, если при естественных изоморфизмах

$$
\begin{aligned}
H_j(I, \partial I) \otimes H_{n-j}(F_I, \partial F_I) \to H_{j-1}(\partial I) \otimes H_{n-j-1}(\partial F_I) \to H_{n-1}(\partial I * \partial F_I) = \\
= H_{n-1}(\partial G_I) \leftarrow H_n(G_I, \partial G_I) \leftarrow H_n(G_I, G_I \backslash a_I) \leftarrow H_n(X, X \backslash a_I) \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

элемент $s \otimes t$ переходит в локальную ориентацию в точке $a_I \in X$.

Пусть изоморфизм $\eta \colon \mathcal{C}_{n-j}(K^*; R) \to \mathcal{C}^j(K; R)$ отображает элемент t_{F_I} в симплициальную коцепь, которая принимает значение 1 на симплексе I и 0 на всех прочих симплексах. Тогда имеем $\eta \circ \partial = \delta \circ \eta$ (доказательство состоит в муторной проверке того, что невырожденное спаривание (2.3) хорошо согласуется с приклеивающими отображениями $\partial_* \colon H_{j+1}(J, \partial J) \to H_j(I, \partial I)$ и $\partial_* \colon H_{n-j}(F_I, \partial F_I) \to H_{n-j-1}(F_J, \partial F_J)$). $\square$

В качестве следствия получаем, что $H^j(X; R) \cong H^j(K; R) \cong H_{n-j}(K^*; R) \cong H_{n-j}(X; R)$.

2.5 Обобщения двойственности Пуанкаре

Приведем без доказательства некоторые обобщения двойственности Пуанкаре. Пусть X — компактное (ориентируемое при $R = \mathbb{Z}$ и произвольное при $R = \mathbb{Z}_2$) многообразие с краем, $\dim X = n$. Тогда существует выделенный элемент $[X] \in H_n(X, \partial X) \cong R$, который также называется фундаментальным классом.

Теорема 2.37 (Двойственность Пуанкаре–Лефшеца)**.** *Пусть X — компактное многообразие с краем, $\dim X = n$. Тогда имеют место изоморфизмы, индуцированные $\frown$-произведением с фундаментальным классом:*

$$H^j(X, \partial X) \cong H_{n-j}(X), \qquad H_j(X, \partial X) \cong H^{n-j}(X).$$

Теорема 2.38 (Двойственность Пуанкаре–Александера–Лефшеца)**.** *Пусть X — замкнутое многообразие и $B \subset A \subset X$ — замкнутые подмножества. Тогда*

$$H^j(X \backslash B, X \backslash A) \cong H_{n-j}(A, B).$$

В частности, $H^j(X, X \backslash A) \cong H_{n-j}(A)$.

Теорема 2.39 (Двойственность Александера)**.** *Пусть $A \subset S^n$ — замкнутое подмножество сферы. Тогда*

$$\widetilde{H}_j(A) \cong \widetilde{H}^{n-1-j}(S^n \backslash A).$$

Упражнение 2.40. Вывести двойственность Пуанкаре, двойственность Пуанкаре–Лефшеца и двойственность Александера из двойственности Пуанкаре–Александера–Лефшеца.

3 Гладкие многообразия

Способ определить умножение в когомологиях, введенный в прошлой части курса, удобен и универсален, однако исторически он не был самым первым. Изначально под умножением понималась теория пересечений на гладких многообразиях, имеющая более наглядную и геометрическую природу.

3.1 Основные определения

Пусть X — многообразие. Пусть U — окрестность точки $x \in X$ и $\varphi\colon U \to V$ — гомеоморфизм на подмножество $\mathbb{R}^n$, существующий по определению. Подмножество U (вместе с фиксированным гомеоморфизмом φ) называется картой на многообразии X. Множество карт U_α, $\alpha \in A$, покрывающее все многообразие X, называется атласом на X.

Допустим, что карты U_α, U_β пересекаются. Тогда $V_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ есть открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Аналогично, $V_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha$ — есть (вообще говоря, уже другое) открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Имеем гомеоморфизм

$$\psi_{\alpha,\beta}\colon V_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta} V_{\beta,\alpha}.$$

Гомеоморфизм $\psi_{\alpha,\beta}$ называется функцией склейки. Заметим, что функция склейки отображает открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ в открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.1. Атлас называется гладким, если все функции склейки являются гладкими отображениями с ненулевым якобианом. Два гладких атласа называются эквивалентными, если их объединение — снова гладкий атлас. Гладкая структура на X — это класс эквивалентности гладких атласов. Гладкое многообразие — это топологическое многообразие с фиксированной на нем гладкой структурой.

Замечание 3.2. Понятие гладкого многообразия нетривиально по многим причинам. Во-первых, существуют топологические многообразия (в том числе компактные), на которых гладких атласов (а значит и гладких структур) нет. Во-вторых, существуют топологические многообразия, и такие гладкие структуры на них, которые не переводятся друг в друга никаким гомеоморфизмом.

Упражнение 3.3. На $S^n, \mathbb{C}P^n, T^n, \mathbb{R}P^n$ можно естественным образом ввести гладкую структуру.

Упражнение 3.4. Ввести гладкую структуру на произведении гладких многообразий.

Упражнение 3.5. Докажите, что множество всех k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является гладким многообразием. Оно называется многообразием Грассмана или грассманианом и обозначается $G_k(V)$ (или $G_{n,k}$).

Определение 3.6. Непрерывное отображение гладких многообразий $f\colon M^m \to N^n$ называется гладким в точке $x \in M$, если существуют карты $U_1 \ni x$, $\phi\colon U_1 \to V_1 \subset \mathbb{R}^m$ и $U_2 \ni f(x)$, $\psi\colon U_2 \to V_2 \subset \mathbb{R}^n$ (в гладких атласах на M и N соотв.), такие что $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ есть гладкое отображение из подмножества $\mathbb{R}^m$ в подмножество $\mathbb{R}^n$. Отображение f называется гладким, если оно гладкое во всех точках.

Гладкой кривой на M называется гладкое отображение $l\colon \mathbb{R} \to M$. Пусть $x \in M$, и $U \ni x$, $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$ — карта гладкого атласа. Рассмотрим множество всех гладких кривых на M, таких что $l(0) = x$, и введем на нем отношение эквивалентности: $l_1 \sim l_2$, если

$$\operatorname{dist}(\phi(l_1(t)), \phi(l_2(t))) = \bar{\bar{o}}(t), \quad t \to 0.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора карты гладкого атласа.

Определение 3.7. Класс эквивалентности кривых называется касательным вектором к гладкому многообразию в точке x. Множество касательных векторов к M в точке x обозначается T_xM.

Если фиксировать карту $\phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^m$, содержащую x, то каждому касательному вектору $[l]$, $l\colon \mathbb{R} \to M$ в точке $x \in M$ однозначно сопоставляется вектор $\frac{\partial \phi(l(t))}{\partial t} \in \mathbb{R}^m$. Таким образом на T_xM имеется структура векторного пространства над $\mathbb{R}$. Эта структура не зависит от выбора карты в гладком атласе. T_xM называется касательным пространством в точке $x \in M$.

Определение 3.8. Гладкое отображение $f\colon M^m \to N^n$ переводит кривые на M в кривые на N, причем эквивалентные кривые переходят в эквивалентные кривые. Таким образом, определено отображение $D_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$, называемое дифференциалом отображения f в точке x. Дифференциал является линейным отображением касательных пространств.

Определение 3.9. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется иммерсивным (соотв. субмерсивным) в точке $x \in M$, если D_xf — мономорфизм (соотв. эпиморфизм). f называется иммерсией или погружением (соотв. субмерсией), если оно иммерсивно (соотв. субмерсивно) в каждой точке. f называется вложением, если оно является погружением и гомеоморфно отображает многообразие M на его образ. Образ вложения $f\colon M \to N$ называется гладким подмногообразием в N.

Определение 3.10. Если отображение $f\colon M \to N$ субмерсивно в точке $x \in M$, то точка x называется регулярной. В противном случае x называется критической точкой, а $f(x)$ — критическим значением. Все точки $y \in N$, не являющиеся критическими значениями, называются регулярными значениями (даже если они не лежат в образе f).

Теорема 3.11. *Если $y \in N$ — регулярное значение для отображения $f\colon M \to N$, то $f^{-1}(y)$ есть гладкое подмногообразие в M.*

Определение 3.12. Отображение $f\colon M \to N$ трансверсально к подмногообразию $A \subset N$, если для любой точки $y = f(x) \in A$ выполнено $T_yA + D_x(T_xM) = T_yN$.

Теорема 3.13. *Если $f\colon M \to N$ трансверсально к подмногообразию $A \subset N$, то $f^{-1}(A)$ является гладким подмногообразием в M. Коразмерность $f^{-1}(A)$ в M совпадает с коразмерностью A в N.*

Теорема 3.14 (Теорема Тома–Сарда о трансверсальности)**.** *Подпространство гладких отображений $f\colon M \to N$ трансверсальных к $A \subset N$ всюду плотно в пространстве всех гладких отображений.*

Вывод из вышесказанного таков: если A, M — гладкие подмногообразия в N, то одно из них всегда можно немного пошевелить так, чтобы они стали трансверсальными. В этом случае их пересечение $A \cap M$ — это опять гладкое подмногообразие, причем

$$\operatorname{codim}(A \cap M) = \operatorname{codim} A + \operatorname{codim} M.$$

Имеем $T_x(A \cap M) = T_xA \cap T_xM \subset T_xN$ для всех $x \in A \cap M$.

3.2 Ориентация на трансверсальном пересечении

В гладком случае выбор локальной ориентации в точке $x \in M$ эквивалентен выбору ориентации касательного пространства T_xM.

Пусть M, A — трансверсальные гладкие подмногообразия многообразия N, и пусть на всех многообразиях M, A, N зафиксирована ориентация. Положим $n = \dim N$, $p = \operatorname{codim} A$, $q = \operatorname{codim} M$.

Ориентации векторных пространств T_xN, T_xM, T_xA определяют ориентацию векторного пространства $T_xA \cap T_xM$ при помощи следующего соглашения. Выберем положительный базис

$$u_1, \dots, u_{n-p-q}, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_p$$

пространства T_xM таким образом, чтобы $u_1, \dots, u_{n-p-q}, v_1, \dots, v_q$ был положительным базисом пространства T_xA, а $u_1, \dots, u_{n-p-q}, w_1, \dots, w_p$ был положительным базисом пространства T_xM. Условимся считать $u_1, \dots, u_{n-p-q}$ положительным базисом пространства $T_x(A \cap M) = T_xA \cap T_xM$.

Выбор ориентаций задает фундаментальные классы $[N] \in H_n(N;\mathbb{Z})$, $[A] \in H_{n-p}(A;\mathbb{Z})$, $[M] \in H_{n-q}(M;\mathbb{Z})$, $[A \cap M] \in H_{n-p-q}(A \cap M;\mathbb{Z})$, а также изоморфизм Пуанкаре $D\colon H^j(N;\mathbb{Z}) \to H_{n-j}(N;\mathbb{Z})$, $\phi \mapsto [N] \frown \phi$. Образы фундаментальных классов $[A]$, $[M]$, $[A \cap M]$ при гомоморфизмах, индуцированных вложениями подмногообразий, лежат в гомологиях многообразия N, и мы для удобства будем обозначать обозначать их теми же символами, т.е. будем считать, что $[A] \in H_{n-p}(N)$, $[M] \in H_{n-q}(N)$, $[A \cap M] \in H_{n-p-q}(N)$.

Теорема 3.15. *При условиях, описанных выше, имеем*

$$D^{-1}([A \cap M]) = D^{-1}([A]) \smile D^{-1}([M]).$$

Иными словами, операция геометрического пересечения циклов двойственна к операции умножения в когомологиях.

Приведем одно частное следствие, которое оказывается полезным на практике. Пусть $\dim A + \dim M = \dim N$, и пусть ϕ_A, ϕ_M — когомологические классы, двойственные к подмногообразиям A и M. Тогда число $\int_N (\phi_A \smile \phi_M) \in \mathbb{Z}$ равно числу точек пересечения подмногообразий A и M с учетом знаков.

Упражнение 3.16. Описать кольца когомологий многообразий $T^n, \mathbb{C}P^n, M_g$, используя пересечения подмногообразий.

Упражнение 3.17. Часовщик смастерил часы с неразличимыми минутной и часовой стрелкой. Сколько раз в день по таким часам нельзя точно определить время? Ход стрелок непрерывный, циферблат 12-часовой.

Упражнение 3.18. (*) Сколько существует аффинных прямых в $\mathbb{C}^3$, которые пересекают каждую из четырех данных прямых, находящихся в общем положении? Докажите, что это число совпадает с $|\int_{G_{2,4}(\mathbb{C})} \omega_A^4|$, где $G_{2,4}(\mathbb{C})$ — грассманиан 2-мерных плоскостей в 4-мерном вещественном пространстве, $A \subset G_{2,4}(\mathbb{C})$ — 3-мерное подмногообразие плоскостей, пересекающих заданную плоскость, а $\omega_A \in H^1(G_{2,4}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ — двойственный к $[A]$ когомологический класс.[2]

4 Расслоения со структурной группой

4.1 Главные G-расслоения

Везде далее G обозначает топологическую группу, то есть: G — группа, G — топологическое пространство, операции умножения $G \times G \to G$ и взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывны. Более того, все пространства, включая G, в дальнейшем будут предполагаться CW-комплексами

Определение 4.1. G-расслоением (или расслоением со структурной группой G) называется следующий набор объектов:

(1) $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F.

(2) Тривиализующее покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ вместе с набором тривиализаций $\varphi_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Пусть отображение $\varphi_{\alpha,x}\colon p^{-1}(x) \to F$ задано формулой $\varphi_{\alpha,x}(y) = pr_2(\varphi_\alpha(y)) \in F$. Если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $\psi_{\alpha,\beta,x} = \varphi_{x,\beta} \circ \varphi_{x,\alpha}^{-1}\colon F \to F$ называется функцией перехода.

[2] Посчитать, что этот интеграл равен 2, — это уже дело техники

(3) G — подгруппа группы гомеоморфизмов слоя $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$, такая что все функции перехода лежат в G и, кроме того, отображение $\psi_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, $x \to \psi_{\alpha,\beta,x}$ непрерывно.

Говоря по-простому, G-расслоения — это расслоения, в которых все функции перехода лежат в $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$.

Два G-расслоения называются эквивалентными, если у них совпадают p, E, B, а объединение их тривиализующих покрытий вновь является тривиализующим покрытием для некоторого G-расслоения.

Заметим, что функции перехода удовлетворяют следующим условиям, называемым условиями коцикла:

$$\psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\beta,\alpha}^{-1}, \qquad \psi_{\beta,\gamma} \circ \psi_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\gamma}. \tag{4.1}$$

Если дано пространство B, покрытие $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, пространство F, подгруппа G его гомеоморфизмов, и набор непрерывных отображений $\psi_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, удовлетворяющий условиям (4.1), то по этим данным можно единственным образом восстановить G-расслоение:

$$E = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times F/\sim,$$

где $(x, f) \sim (x', f')$, если $x = x' \in U_\alpha \cap U_\beta$, $f' = \psi_{\alpha,\beta}(x)(f)$.

Определение 4.2. Главным G-расслоением называется G-расслоение, у которого слой F гомеоморфен G, причем G действует на F умножением слева.

Заметим, что G действует на $F \cong G$ также умножением справа, и это действие коммутирует с умножением слева. Поэтому корректно определено правое действие G на тотальном пространстве главного G-расслоения. Это действие свободно, а его орбиты — это в точности слои главного G-расслоения. Приходим к эквивалентному определению.

Определение 4.3. Главным G-расслоением называется локально тривиальное расслоение $p\colon E \to B$ со свободным правым действием группы G на E, таким что орбиты этого действия совпадают со слоями расслоения.

Базу главного G-расслоения можно отождествить с пространством орбит G-действия.

Конструкция 4.4. По любому G-расслоению η можно каноническим способом построить главное G-расслоение, взяв ту же базу B, то же покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и те же функции перехода $\psi_{\alpha,\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$, но заменив слой на G. Это главное G-расслоение называется ассоциированным с η.

Пример 4.5. Лента Мебиуса с краем представляет из себя $\mathbb{Z}_2$-расслоение с базой S^1 и слоем $I = [-1; 1]$, где $\mathbb{Z}_2$ действует на I переменой знака. Ассоциированное главное $\mathbb{Z}_2$-расслоение является расслоением над S^1 со слоем $F \cong \mathbb{Z}_2$ из двух точек, а именно двулистным накрытием $S^1 \to S^1$.

Утверждение 4.6. *Пусть $p\colon E \to B$ — G-расслоение со слоем F (соотв. главное G-расслоение), и $f\colon B' \to B$ — непрерывное отображение. Тогда индуцированное расслоение $f^*E \to B'$ является G-расслоением со слоем F (соотв. главным G-расслоением). Гомотопные отображения f, f' индуцируют эквивалентные G-расслоения.*

Напомним, что $f^*E = \{(e, b') \in E \times B' \mid p(e) = f(b')\}$, а отображение $f^*E \to B'$ есть проекция на вторую координату.

Пусть EG — стягиваемый CW-комплекс, на котором G действует справа свободно. Действие определяет на EG структуру главного G-расслоения $p_G\colon EG \to BG$, где $BG = EG/G$ — пространство орбит. Это расслоение называется универсальным (главным) G-расслоением, а BG — классифицирующим пространством.

Теорема 4.7 (Теорема о классификации главных G-расслоений)**.** *Для любого главного G-расслоения $p\colon E \to B$ существует единственное с точностью до гомотопии отображение $f\colon B \to BG$, такое что $E = f^*E_G$. Иными словами, множество главных G-расслоений над B биективно множеству $[B, BG]$ гомотопических классов отображений из B в BG.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что на B задано регулярное клеточное разбиение, т.е. такое, что отображение приклейки границы каждой клетки является гомеоморфизмом на образ. Пусть $p\colon E \to B$ главное G-расслоение. Построим требуемое отображение $f\colon B \to BG$ индукцией по клеткам. Пусть отображение f определено на остове B_{k-1} и e^k — k-мерная клетка. Отображение приклейки $\partial e^k \to B_{k-1}$ изоморфизм, поэтому e^k стягиваема. Значит над ней расслоение E тривиально: $E|_{e^k} \cong e^k \times G$ и в частности оно тривиально над ее границей: $E|_{\partial e^k} \cong \partial e^k \times G$. Из тривиальности над границей следует, что отображение $f|_{\partial e^k}\colon \partial e^k \to BG$ поднимается до отображения $r_1\colon \partial e^k \to EG$. Это отображение можно продолжить до отображения $r_2\colon e^k \to EG$, поскольку EG стягиваемо. Наконец, r_2 можно разнести правым действием группы, и получить отображение $r_3\colon p^{-1}(e_k) \cong e_k \times G \to EG$. Таким образом, мы продолжили отображение f на клетку e_k.

Докажем единственность с точностью до гомотопии. Пусть $f, g\colon B \to BG$, $E = f^*EG = g^*EG$. Пару имеющихся G-эквивариантных отображений $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon E \to EG$ можно продолжить до G-эквивариантного отображения $\widetilde{H}\colon E \times [0,1] \to EG$, такого что $\widetilde{H}_0 = f$, $\widetilde{H}_1 = g$, поскольку EG стягиваемо. Это отображение опускается до гомотопии $H\colon B \times [0,1] \to BG$ между f и g. □

Из утверждения в частности следует, что универсальное расслоение $p_G\colon EG \to BG$ определено однозначно с точностью до гомотопии (в случае, если оно существует, разумеется).

Замечание 4.8. Тривиальное расслоение над B очевидно индуцируется из отображения $B \to BG$, гомотопного отображению в точку.

Пример 4.9. Пусть $G = \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим $S^\infty = \lim_{\to n} S^n$, относительно направленной системы $S^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow S^2 \hookrightarrow \ldots$ с топологией слабого предела. Пространство S^∞ является CW-комплексом. Имеем $\pi_n(S^\infty) = 0$ (поскольку $\pi_n(S^m) = 0$ при достаточно больших m). Значит, по теореме Уайтхеда S^∞ стягиваемо. Группа $\mathbb{Z}_2$ свободно действует на S^∞ антиподальным отображением. Значит $S^\infty = E\mathbb{Z}_2$, а пространство орбит $S^\infty/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$ является классифицирующим пространством $B\mathbb{Z}_2$.

В качестве примера использования классификационной теоремы, опишем все главные $\mathbb{Z}_2$-расслоения над S^1. По классификационной теореме это множество эквивалентно $[S^1, \mathbb{R}P^\infty] = \pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}_2$. Элементу $0 \in \pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$ соответствует тривиальное расслоение $S^1 \times \mathbb{Z}_2 \to S^1$ (это общий феномен, см. замечание 4.8), а нетривиальному элементу $a \in \pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$ соответствует двулистное накрытие $S^1 \to S^1$, которое ранее появилось в примере 4.5.

Пример 4.10. Пусть $G = U(1) \cong S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Аналогично предыдущему примеру проверяется, что $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$.

Теперь докажем, что универсальное расслоение и классифицирующее пространство существуют для любой группы G. Для этого опишем явную конструкцию.

Конструкция 4.11 (Конструкция Мильграма–Стинрода). Рассмотрим конфигурационное пространство X, элементы которого суть наборы конечного числа точек на отрезке: $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$ с приписанными им весами $w_1, \ldots, w_n \in G$. Сделаем некоторые отождествления, а именно:

(1) Разрешается слепить две точки с равными координатами в одну, при этом их веса перемножить в правильном порядке. Иными словами, набор

$$(t_1(w_1), \ldots t_i(w_i), t_{i+1}(w_{i+1}), \ldots, t_n(w_n))$$

отождествляется с набором

$$(t_1(w_1), \ldots t_i(w_i w_{i+1}), \ldots, t_n(w_n)),$$

если $t_i = t_{i+1}$. Также можно выбрасывать точки, заряд которых равен единице группы.

(2) Заряд любой точки в позиции 0 разрешается занулить (т.е. превратить в единицу группы).

Полученное конфигурационное пространство является стягиваемым. Чтобы получить гомотопию в точку, рассмотрим гомотопию, стягивающую отрезок $[0;1]$ в его левый конец: эта гомотопия утаскивает все конфигурации в 0, где заряды зануляются. Можно также показать, что X является CW-комплексом, если таковым является группа G.

Наконец, зададим на X правое действие: скажем, что под действием элемента $g \in G$, конфигурация $(t_1(w_1), \ldots, t_n(w_n))$ переходит в $(t_1(w_1), \ldots, t_n(w_n), 1(g))$ (иными словами действие подкручивает заряд самой правой точки). Это действие, очевидно, свободно. Значит $X = EG$ для группы G. Классифицирующее пространство BG, таким образом, является конфигурационным пространством заряженных точек, в котором зануление происходит не только в левом конце отрезка, но и в правом конце.

Замечание 4.12. Из приведенной конструкции видна функториальность: непрерывному гомоморфизму топологических групп $G \to H$ соответствует отображение классифицирующих пространств $BG \to BH$. Также видно, что $B(G \times H) = BG \times BH$.

Упражнение 4.13. Доказать, что в случае $G = \mathbb{Z}_2$ конструкция Мильграма–Стинрода тоже дает $BG = \mathbb{R}P^\infty$.

Упражнение 4.14. Пусть G — дискретная группа. Доказать, что $BG = K(G, 1)$.

Упражнение 4.15. (а) Доказать, что $BT^n \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$. (б) Доказать, что множество главных T^n-расслоений над CW-комплексом B биективно множеству $H^2(B; \mathbb{Z})$, причем тривиальному расслоению соответствует $0 \in H^2(B; \mathbb{Z})$.

Упражнение 4.16. Опишите классифицирующее пространство свободной группы на n образующих.

Упражнение 4.17. Пусть Σ_n — группа перестановок n элементов. Для произвольного топологического пространства X определим $F_nX = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Группа Σ_n естественным образом действует на F_nX, переставляя точки из набора. Пусть $C_nX = F_nX/\Sigma_n$ — пространство n-элементных подмножеств пространства X. Пространства F_nX, C_nX называются конфигурационными пространствами (соотв. упорядоченных и неупорядоченных наборов точек). Докажите, что $B\Sigma_n = C_n\mathbb{R}^\infty$.

4.2 Характеристические классы G-расслоений

Определение 4.18. Когомологиями группы G с коэффициентами в кольце R называются когомологии ее классифицирующего пространства $H^*(BG; R)$.

Замечание 4.19. Здесь может возникнуть путаница, поскольку G сама по себе является топологическим пространством, а значит определены когомологии G в привычном смысле. Для алгебраистов, однако, определение, приведенное выше, — первостепенно. Приходится как-то с этим жить.

Зафиксируем пространство F, группу G его гомеоморфизмов, и кольцо коэффициентов R.

Определение 4.20. Характеристическим классом G-расслоений со слоем F называется правило, которое каждому G-расслоению $p\colon E \to B$ со слоем F сопоставляет когомологический класс $c(p) \in H^*(B; R)$ таким образом, что для любого отображения $f\colon B' \to B$ имеем

$$c(f^*p) = f^*(c(p)). \tag{4.2}$$

Здесь слева f^*p — индуцированное расслоение, а справа $f^*\colon H^*(B; R) \to H^*(B'; R)$ — индуцированный гомоморфизм колец когомологий.

Из определения следует, что сумма, умножение на элементы из R, и $\smile$-произведение характеристических классов вновь являются характеристическими классами. Значит все характеристические классы образуют R-алгебру.

Теорема 4.21. *Алгебра характеристических классов G-расслоений (с произвольным, но фиксированным слоем) изоморфна когомологиям группы G, то есть кольцу $H^*(BG; R)$.*

Доказательство. Доказательство почти очевидно. Переходя к ассоциированным главным G-расслоениям, можно считать, что все расслоения главные. Характеристический класс определен для всех расслоений, в том числе и для универсального. Получаем естественный гомоморфизм из кольца всех хар.классов в $H^*(BG;R)$. С другой стороны, любое главное расслоение индуцируется из универсального, а значит, любой элемент $c \in H^*(BG;R)$ можно продолжить до хар.класса, используя формулу (4.2). $\square$

В полную силу теория хар.классов начинает работать для векторных расслоений, которым посвящены следующие параграфы.

Упражнение 4.22. Пусть G — дискретная группа. Докажите, что когомологии $H^*(BG;R)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $C^n(G;R)$ — модуль всех функций из G^n в R. Зададим гомоморфизм $d^n\colon C^n(G;R) \to C^{n+1}(G;R)$ формулой

$$d^n\phi(g_1,\dots,g_{n+1}) =$$
$$= \phi(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi(g_1,\dots,g_{i-1},g_i\cdot g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}\phi(g_1,\dots,g_n).$$

Проверьте, что $d^{n+1}\circ d^n = 0$ и $\ker d^n/\operatorname{Im} d_{n-1} \cong H^n(BG;R)$ (Указание: покажите, что на конструкции Мильграма–Стинрода имеется естественная структура клеточного комплекса, и дифференциальный комплекс ее клеточных коцепей совпадает с $C^*(G;R)$).

4.3 Векторные расслоения

Определение 4.23. Локально тривиальное расслоение называется векторным расслоением (вещественным или комплексным), если в его слоях задана структура векторного пространства (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), непрерывно зависящая от точки базы.

Пользуясь введенным ранее формализмом можно дать менее понятное, но более строгое эквивалентное определение

Определение 4.24. G-расслоение $p\colon E \to B$ со слоем F называется вещественным (соотв. ориентированным вещественным, соотв. комплексным) векторным расслоением, если $F = \mathbb{R}^n$, $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (соотв. $F = \mathbb{R}^n$, $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})_+$, соотв. $F = \mathbb{C}^n$, $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) и G действует на F стандартным образом.

Это определение как раз означает, что все слои — векторные пространства, а все функции перехода — линейные операторы. Ориентируемость означает, что функции перехода — линейные операторы с положительным определителем.

Поскольку $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, а $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$, любое комплексное векторное расслоение η можно превратить в вещественное векторное расслоение, которое называется его овеществлением и обозначается $\eta_{\mathbb{R}}$.

Утверждение 4.25. *Пусть $\eta\colon E \to B$ — векторное расслоение и $f\colon B' \to B$ непрерывное отображение. Тогда индуцированное расслоение $f^*\eta\colon f^*E \to B'$ является векторным расслоением (того же типа, что и η).*

Любому $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-расслоению $E \to B$ с произвольным слоем F, можно сопоставить n-мерное векторное расслоение с той же базой, покрытием базы, и теми же функциями перехода между элементами покрытия. Оно называется ассоциированным с E векторным расслоением. В зависимости от ситуации бывает удобно работать либо с ассоциированным главным $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-расслоением (у которого слой — $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$), либо с ассоциированным векторным расслоением (у которого слой $\mathbb{R}^n$).

Векторное расслоение с базой B можно рассматривать как набор векторных пространств, параметризованный точками из B. Как следствие, с векторными расслоениями над фиксированной базой можно проделывать все те же операции, что и над обычными векторными пространствами: брать прямые суммы, тензорные произведения, переходить к двойственному пространству, брать внешнюю степень, симметрическую степень, овеществлять, комплексифицировать и т.д.. Все эти операции производятся послойно. Чтобы не определять каждую из них по отдельности, используем следующий трюк.

Конструкция 4.26. Пусть Vect — категория векторных пространств и $\mathcal{F}\colon \mathrm{Vect}^k \times (\mathrm{Vect}^*)^l \to \mathrm{Vect}$ — $(k+l)$-местный непрерывный функтор (ковариантный по k переменным, и контравариантный по l-переменным). Этот функтор есть правило, которое каждому набору векторных пространств $(V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_l)$ сопоставляет векторное пространство $\mathcal{F}(V_1,\dots,W_l)$, а набору линейных отображений $f_1\colon V_1 \to V_1'$, …, $f_k\colon V_k \to V_k'$, $g_1\colon W_1 \to W_1'$, …, $g_l\colon W_l \to W_l'$ линейное отображение

$$\mathcal{F}(f_1,\dots,g_l)\colon \mathcal{F}(V_1,\dots,V_k,W_1',\dots,W_l') \to \mathcal{F}(V_1',\dots,V_k',W_1,\dots,W_l),$$

удовлетворяющее набору естественных условий (тождественные отображения переходят в тождественные, композиция в композицию, $\mathcal{F}$ непрерывен на гомоморфизмах). Пусть $\eta_1,\dots,\eta_k,\xi_1,\dots,\xi_l$ — векторные расслоения с базой B. Можно считать, что у них есть общее тривиализующее покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$, поскольку всегда можно перейти к общему измельчению. Результатом применения функтора $\mathcal{F}$ к расслоениям $\eta_1,\dots,\eta_k,\xi_1,\dots,\xi_l$ называется расслоение $\mathcal{F}(\eta_1,\dots,\eta_k,\xi_1,\dots,\xi_l)$, слоем которого является векторное пространство $\mathcal{F}(F_{\eta_1},\dots,F_{\eta_k},F_{\xi_1},\dots,F_{\xi_l})$, а функциями перехода — гомоморфизмы

$$\mathcal{F}((\psi_{\eta_1})_{\alpha,\beta},\dots,(\psi_{\eta_k})_{\alpha,\beta},(\psi_{\xi_1})_{\alpha,\beta},\dots,(\psi_{\xi_l})_{\alpha,\beta}).$$

Замечание 4.27. Таким образом, например, определена операция прямой суммы векторных расслоений $\xi_1\colon E_1 \to B$ и $\xi_2\colon E_2 \to B$, которая обозначается $\xi_1 \oplus \xi_2$. Она также называется суммой Уитни векторных расслоений. Эквивалентным образом ее можно определить, как расслоение над B, индуцированное диагональю $\Delta\colon B \to B \times B$ из декартова произведения $\xi_1 \times \xi_2\colon E_1 \times E_2 \to B \times B$.

Предложение 4.28. *В слоях вещественного (соотв. комплексного) векторного расслоения над паракомпактной базой можно задать положительно определенное скалярное (соотв. эрмитово) произведение, непрерывно зависящее от точки базы.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — тривиализующее покрытие. Согласно паракомпактности, можно считать, что оно локально конечно. Выберем замкнутые множества $Z_\alpha \subset U_\alpha$, так чтобы их внутренности по прежнему покрывали B и рассмотрим функции $\phi_\alpha\colon B \to [0;1]$, такие что $\phi_\alpha(B \backslash U_\alpha) = 0$, $\phi_\alpha(Z_\alpha) = 1$. На каждом U_α расслоение тривиализуется, поэтому над этим множеством можно выбрать скалярное произведение $g_\alpha\colon p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) \to \mathbb{R}$. Наконец, рассмотрим скалярное произведение $\sum_\alpha \phi_\alpha g_\alpha\colon p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) \to \mathbb{R}$. Оно корректно определено, поскольку в каждой точке $x \in B$ лишь конечное число слагаемых ненулевые, и оно является скалярным произведением в каждой точке. Комплексный случай аналогичен. □

Поскольку существует скалярное произведение, мы можем считать, что структурная группа вещественных векторных расслоений — это не группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, а ее максимальная компактная подгруппа $O(n)$ (то есть можно считать, что все функции перехода — ортогональные преобразования). Аналогично, можно считать, что структурная группа комплексных векторных расслоений — это не $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, а ее максимальная компактная подгруппа $U(n)$.

Этот же вывод можно было сделать исходя из того, что $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ретрагируется на $O(n)$, а $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ретрагируется на $U(n)$ (посредством ортогонализации Грамма–Шмидта). Действительно, множество расслоений над B, имеющих структурную группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, совпадает с $[B, B\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})] = [B, BO(n)]$, а значит совпадает с множеством расслоений над B, имеющих структурную группу $O(n)$. В такой ситуации говорят, что структурная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ редуцировалась к $O(n)$. Аналогичным образом, структурная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_+$ ориентированных расслоений редуцируется к $\mathrm{SO}(n)$.

Замечание 4.29. Заметим, что $S^1 = U(1)$, поэтому одномерные комплексные расслоения над B классифицируются классами отображений $[B, BS^1]$. В примере 4.10 мы выяснили, что $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$. Универсальное векторное расслоение, соответствующее универсальному главному S^1-расслоению $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ легко описать: над каждой точкой $l \in \mathbb{C}P^\infty$ висит сама прямая $l \subset \mathbb{C}^\infty$. Пусть $t \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ — образующая кольца $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]$. Любое одномерное комплексное расслоение η над B индуцируется из универсального при помощи однозначно определенного отображения $f\colon B \to \mathbb{C}P^\infty$. Значит определен когомологический класс $c_1(\eta) \overset{\text{def}}{=} f^*(t) \in H^2(B; \mathbb{Z})$, называемый первым классом Черна одномерного векторного расслоения η.

Пример 4.30. Пусть $\gamma_1\colon E \to \mathbb{C}P^n$ — каноническое одномерное расслоение, то есть расслоение, слоем которого над точкой $l \in \mathbb{C}P^n$ является сама прямая $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Его первый класс Черна совпадает с образующей кольца когомологий проективного пространства: $c_1(\gamma_1) = t$, где $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$.[3]

Далее символами $\underline{\mathbb{R}}^k$, $\underline{\mathbb{C}}^k$ будут обозначаться тривиальные расслоения (над базой, понятной из контекста).

Определение 4.31. Пусть $\eta\colon E \to B$ — векторное расслоение. Сечением расслоения называется непрерывное отображение $s\colon B \to E$, такое что $\eta \circ s = \mathrm{id}_B$. Если значением

[3]Иногда бывает удобно считать $c_1(\gamma) = -t$. Этот знак является неизбежным злом.

s в каждой точке является ненулевой вектор слоя, то сечение называется нигде не нулевым. Набор сечений $s_1, \ldots, s_k$ называется всюду линейно независимым, если их значения в любой точке линейно независимы.

Упражнение 4.32. n-мерное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно допускает n линейно независимых сечений.

Упражнение 4.33. Если на расслоении η есть скалярное произведение, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\eta, \underline{\mathbb{R}}) \cong \eta$.

С комплексными расслоениями ситуация чуть сложнее. Пусть η — комплексное расслоение с оператором комплексной структуры $J\colon \eta^{-1}(x) \to \eta^{-1}(x)$, $J^2 = -1$. Символом $\bar{\eta}$ обозначается сопряженное расслоение, то есть расслоение в котором J заменили на $-J$.

Упражнение 4.34. Если на комплексном расслоении η есть эрмитово произведение, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\eta, \underline{\mathbb{C}}) \cong \bar{\eta}$.

Упражнение 4.35. Докажите, что для любого вещественного расслоения η над компактной базой B найдется такое векторное расслоение ξ над B, что $\eta \oplus \xi$ — тривиальное расслоение. Докажите, что требование компактности базы убрать нельзя.

Упражнение 4.36. Докажите, что операция тензорного произведения задает на множестве (классов изоморфизма) одномерных вещественных расслоений над B структуру группы. Если на η есть скалярное произведение, то η является элементом порядка 2 или единицей в этой группе.

Упражнение 4.37. Докажите, что группа из предыдущей задачи изоморфна $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$.

Упражнение 4.38. Рассмотрим множество $VB(X)$ всех вещественных (соотв. комплексных) расслоений над заданным X. Операции прямой суммы и тензорного произведения задают на этом множестве структуру полукольца. Соответствующее кольцо Гротендика (т.е. множество формальных разностей $\eta - \xi$, $\eta, \xi \in VB(X)$) называется K-теорией пространства X и обозначается $KO(X)$ (в комплексном случае $K(X)$). Доказать, что $K(\mathrm{pt}) = KO(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f^*\colon K(Y) \to K(X)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы.

Упражнение 4.39. Пусть X — компактный CW-комплекс, а $C(X)$ — алгебра непрерывных вещественнозначных функций на X. Пусть η — вещественное векторное расслоение над X. Докажите, что множество сечений $\Gamma(\eta)$ расслоения η обладает структурой модуля над $C(X)$. (а) Докажите, что модуль $\Gamma(\eta)$ свободен в том и только том случае, когда η тривиально. (б) Модуль прямой суммы расслоений равен прямой сумме модулей. (в) Докажите, что для произвольного расслоения η модуль $\Gamma(\eta)$ является проективным (то есть прямым слагаемым в свободном модуле).

4.4 Когомологии линейных групп

Для того, чтобы исследовать характеристические классы векторных расслоений, необходимо вычислить когомологии пространств $BO(n)$ и $BU(n)$, чем мы и займемся. В случае групп $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ (или их максимальных компактных подгрупп $U(n)$ и $O(n)$) существует классический способ построения универсальных расслоений и классифицирующих пространств.

Определение 4.40. Пусть $V_{m,n}$ (соотв. $V_{m,n}(\mathbb{C})$) — множество ортонормированных n-реперов в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ (соотв. $\mathbb{C}^m$). Пространства $V_{m,n}$, $V_{m,n}(\mathbb{C})$ называются многообразиями Штифеля.

Пусть $G_{m,n}$ (соотв. $\widetilde{G}_{m,n}$, соотв. $G_{m,n}(\mathbb{C})$) — множество n-плоскостей в $\mathbb{R}^m$ (соотв. ориентированных n-плоскостей в $\mathbb{R}^m$, соотв. комплексных n-плоскостей в $\mathbb{C}^m$). Пространства $G_{m,n}$, $\widetilde{G}_{m,n}$, $G_{m,n}(\mathbb{C})$ называются многообразиями Грассманна, или грассманианами (неориентированным, ориентированным и комплексным соотв.)

Для удобства мы ограничимся вещественным случаем, хотя комплексный полностью аналогичен.

Группа $O(n)$ свободно действует на $V_{m,n}$ ортогональным преобразованием n-реперов, а пространство орбит этого действия — в точности многообразие Грассманна: $V_{m,n}/O(n) \cong G_{m,n}$.

Пусть $V_{m,n} \hookrightarrow V_{m+1,n}$ отображение многообразий Штифеля, индуцированное вложением $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Пусть $V_{\infty,n}$ обозначает прямой предел последовательности отображений

$$V_{m,n} \hookrightarrow V_{m+1,n} \hookrightarrow V_{m+2,n} \hookrightarrow V_{m+3,n} \hookrightarrow \cdots$$

снабженный слабой топологией. Пространство $V_{\infty,n}$ (которое можно понимать как множество n-реперов в $\mathbb{R}^\infty$, попадающих в конечное подпространство $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^\infty$) называется бесконечномерным пространством Штифеля. Аналогичным образом отображения $G_{m,n} \hookrightarrow G_{m+1,n}$, индуцированные вложениями $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ дают бесконечную цепочку вложений

$$G_{m,n} \hookrightarrow G_{m+1,n} \hookrightarrow G_{m+2,n} \hookrightarrow G_{m+3,n} \hookrightarrow \cdots,$$

прямой предел $G_{\infty,n}$ которой называется бесконечным грассманианом.

Группа $O(n)$ свободно действует на $V_{\infty,n}$, и пространство орбит совпадает с $G_{\infty,n}$. Как для многообразий Штифеля, так и для грассманнианов существуют клеточные структуры, которые уважаются включениями, а значит $V_{\infty,n}$ и $G_{\infty,n}$ являются CW-комплексами.

Предложение 4.41. *Пространство $V_{\infty,n}$ стягиваемо.*

Доказательство. Докажем, что $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < m-n$. Отсюда будет следовать, что $\pi_k(V_{\infty,n}) = 0$ для всех k, а значит $V_{\infty,n}$ стягиваемо по теореме Уайтхеда.

Рассмотрим отображение $f\colon V_{m,n} \to S^{m-1}$, которое сопоставляет реперу его первый вектор. Поскольку оставшиеся векторы являются репером в пространстве размерности $m-1$, ортогональном первому вектору, f является локально тривиальным расслоением со слоем $V_{m-1,n-1}$. Равенство $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < m-n$ теперь следует по индукции из точной последовательности гомотопических групп для расслоения $f\colon V_{m,n} \to S^{m-1}$. □

Таким образом $V_{\infty,n} = EO(n)$, $G_{\infty,n} = BO(n)$. Аналогично доказывается, что

$$\widetilde{G}_{\infty,n} = BSO(n) \qquad G_{\infty,n}(\mathbb{C}) = BU(n).$$

Теорема 4.42. *$H^*(G_{\infty,n}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, $\deg c_i = 2i$ и $H^*(G_{\infty,n}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$, $\deg w_i = i$.*

Для доказательства нам понадобится теорема Лере–Хирша, представляющая самостоятельный интерес, а также одно простое следствие из нее. Теорема Лере–Хирша является в некотором роде обобщением формулы Кюннета на расслоения.

Теорема 4.43 (Теорема Лере–Хирша)**.** *Пусть $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, а R — кольцо коэффициентов. Допустим, что $H^*(F; R)$ является свободным модулем над R и допустим, что существуют такие классы $\phi_1, \dots, \phi_s \in H^*(E; R)$, что их ограничения $i^*(\phi_1), \dots, i^*(\phi_s)$ дают базис в $H^*(F; R)$ для любого вложения слоя $i\colon F \to E$. Тогда $H^*(E; R)$ является свободным $H^*(B; R)$-модулем с базисом $\phi_1, \dots, \phi_s$. Более точно, отображение*

$$\Phi_B\colon H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \to H^*(E; R), \quad \sum_{k,l} b_k \otimes i^*(\phi_l) \mapsto \sum_{k,l} p^*(b_k) \smile \phi_l.$$

является изоморфизмом $H^*(B; R)$-модулей.

Доказательство. Приведем набросок доказательства. При помощи точной последовательности Майера–Вьеториса можно доказать, что, если Φ_{B_1}, Φ_{B_2} и $\Phi_{B_1 \cap B_2}$ — изоморфизмы, то $\Phi_{B_1 \cup B_2}$ — тоже изоморфизм. Таким образом, нужно доказать утверждение для достаточно малого подмножества $B' \subset B$. Но над достаточно малым подмножеством расслоение тривиально, и теорема сводится к формуле Кюннета. $\square$

Пусть $p\colon X \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{C}P^k$ и компактной базой B. Пусть $\gamma_{1,X}\colon E \to X$ — каноническое одномерное комплексное расслоение, то есть расслоение, слоем которого над x является соответствующая прямая[4] из слоя $l \in \mathbb{C}P^k$. Напомним (см. замечание 4.29), что $c_1(\gamma_{1,X}) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ обозначает первый класс Черна линейного расслоения $\gamma_{1,X}$.

Следствие 4.44. *Пусть $p\colon X \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{C}P^k$, $\gamma_{1,X}\colon E \to X$ — каноническое одномерное расслоение над X, и $t = c_1(\gamma_{1,X})$. Тогда $H^*(X)$ есть свободно порожденный модуль над $H^*(B)$ с базисом $1, t, \dots, t^k$.*

[4]строго говоря, в этом абзаце надо рассматривать не произвольные расслоения со слоем $\mathbb{C}P^k$, а проективизации векторных расслоений. В этом случае $\gamma_{1,X}$ определяется строго следующим образом. Пусть p — проективизация векторного расслоения ξ над B. Поскольку B компактно, ξ можно считать подрасслоением в тривиальном $B \times \mathbb{C}^N$. Переходя к проективизации, получаем, что X является подмножеством в $B \times \mathbb{C}P^{N-1}$. Расслоение $\gamma_{1,X}$ — это расслоение, индуцированное из γ_1 над $\mathbb{C}P^{N-1}$ последовательностью отображений $X \hookrightarrow B \times \mathbb{C}P^{N-1} \to \mathbb{C}P^{N-1}$, где первая стрелка — включение, а вторая — проекция на второй сомножитель.

Доказательство. Когомологии $\mathbb{C}P^k$ есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль. Пусть $i\colon \mathbb{C}P^k \to X$ вложение произвольного слоя. Тогда индуцированное расслоение $i^*\gamma_{1,X}$ есть по определению каноническое расслоение γ_1 над $\mathbb{C}P^k$. Из определения хар.классов следует, что $i^*t = i^*c_1(\gamma_{1,X}) = c_1(i^*\gamma_{1,X})$. Последний класс есть образующая кольца $H^*(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})$ (см. пример 4.30). Значит $i^*(1), i^*(t), \dots, i^*(t^k)$ свободно порождают $H^*(\mathbb{C}P^k)$ для любого слоя и применима теорема Лере–Хирша. □

Теперь мы готовы доказать Теорему 4.42.

Доказательство. Докажем только комплексный случай, вещественный аналогичен. Вложение максимального тора $T^n \to U(n)$ (в качестве диагональных матриц) индуцирует отображение $BT^n \to BU(n)$, а значит и гомоморфизм колец $P\colon H^*(BU(n)) \to H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$, $\deg t_i = 2$. План: (1) Образ P лежит в симметрических многочленах $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. (2) P инъективен. (3) Образ P совпадает с $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. Отсюда все следует, поскольку $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, где σ_i — i-й симметрический многочлен, $\deg \sigma_i = 2i$.

(1) Неформально говоря, это следует из того, что T^n можно непрерывно "прокрутить" внутри $U(n)$, так чтобы его координатные подторы поменялись местами. Рассмотрим случай $n = 2$. Рассмотрим отображение $s\colon T^2 \to T^2$, переставляющее координаты. Индуцированное отображение $Bs^*\colon H^*(BT^2) \to H^*(BT^2)$ переставляет образующие кольца многочленов. Докажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^*(BT^2) \arrow[rr, "Bs^*"] \arrow[dr, "P"'] & & H^*(BT^2) \arrow[dl, "P"] \\ & H^*(BU(2)) & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

коммутативна. Заметим, что унитарная матрица $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ отличается от $\begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}$ сопряжением на элемент $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U(2)$. Пусть $h\colon [0,1] \to U(2)$ — путь в $U(2)$, соединящий 1 с A, а $\widetilde{h}\colon [0;1] \to \mathrm{Aut}(U(2))$, $\widetilde{h}(t)\colon M \to h(t)Mh(t)^{-1}$ — непрервыное семейство внутренних автоморфизмов. Из наличия гомотопии $\widetilde{h}$ между $\mathrm{id}_{U(2)}$ и автоморфизмом сопряжения на A следует, что автоморфизм сопряжения на A индуцирует тождественный гомоморфизм $H^*(BU(2)) \to H^*(BU(2))$. С другой стороны, у подгруппы $T^2 \subset U(2)$ он меняет местами координаты. Отсюда следует коммутативность диаграммы (4.3). Значит образ $H^*(BU(2))$ в $H^*(BT^2)$ состоит из симметрических многочленов. Общий случай $n > 2$ аналогичен (достаточно прокручивать двумерные подторы, а это мы уже умеем).

(2) Пусть $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k \leqslant m$. Цепочка вложенных подпространств

$$W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_k \subset \mathbb{C}^m, \qquad \dim W_i = j_i,$$

называется флагом в $\mathbb{C}^m$ типа $(j_1, \dots, j_k)$. Пусть $F_{m;j_1,\dots,j_k}$ — многообразие всех флагов $\mathbb{C}^m$ типа $(j_1, \dots, j_k)$ (упр.: проверьте, что это многообразие). Пусть также $F_{\infty;j_1,\dots,j_k} = \lim_{\to m} F_{m;j_1,\dots,j_k}$ — объединение пространств флагов, снабженное слабой топологией.

Имеем отображение $V_{\infty,n} \to F_{\infty,1,2,\dots,n}$, которое каждому ортонормированному реперу $(e_1, \dots, e_n)$ сопоставляет флаг

$$\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Заметим, что на $V_{\infty,n}$ есть естественное свободное действие тора T^n: $(t_1, \dots, t_n) \cdot (e_1, \dots, e_n) = (t_1 e_1, \cdots, t_n e_n)$, причем пространством орбит этого действия как раз является $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ (проверьте это!). Таким образом, можно считать, что $F_{\infty,1,2,\dots,n} = BT^n$, поскольку $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ есть база главного T^n-расслоения со стягиваемым тотальным пространством $V_{\infty,n}$.

На пространстве флагов $F_{\infty,1,2,\dots,n}$ есть n канонических одномерных расслоений $\xi_1, \dots, \xi_n$. Слоем ξ_i над флагом $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k$ является фактор W_i/W_{i-1}. Из конструкций следует, что первые классы Черна $t_i = c_1(\xi_i) \in H^2(F_{\infty,1,2,\dots,n})$ являются образующими кольца $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n}) = H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$.

Рассмотрим башню расслоений

$$F_{\infty,1,2,\dots,n} \xrightarrow{p_2} F_{\infty,2,\dots,n} \xrightarrow{p_3} F_{\infty,3,\dots,n} \xrightarrow{p_n} \cdots F_{\infty,n} = G_{\infty,n},$$

где отображение $p_j\colon F_{\infty,j-1,\dots,n} \to F_{\infty,j\dots,n}$ “забывает” наименьшее пространство флага. Расслоение p_j очевидно имеет слой $\mathbb{C}P^{j-1}$ (это все возможные способы выбрать W_{j-1}, $\dim W_{j-1} = j-1$ внутри $W_j \cong \mathbb{C}^j$). Многократно применяя следствие 4.44, получаем цепочку утверждений: $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,2,\dots,n})$ с базисом $1, t_2$; $H^*(F_{\infty,2,3,\dots,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,3,\dots,n})$ с базисом $1, t_3, t_3^2$, …, $H^*(F_{\infty,n-1,n})$ есть свободный модуль над $H^*(F_{\infty,n})$ с базисом $1, t_n, \dots, t_n^{n-1}$. Значит $H^*(F_{\infty,1,2,\dots,n}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ есть свободный модуль над $H^*(G_{\infty,n})$ с базисом $t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, где $0 \leqslant i_s \leqslant s-1$. В частности, отображение $H^*(G_{\infty,n}) \to H^*(BT^n)$ инъективно[5].

(3) Заметим, что $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ является свободным модулем над $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$ с базисом $t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$, где $0 \leqslant i_s \leqslant s-1$ (упражнение по алгебре). Значит, $H^*(G_{\infty,n})$ совпадает с $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]^{S_n}$. $\square$

5 Характеристические классы векторных расслоений

5.1 Характеристические классы Черна и Штифеля–Уитни

Далее, $c_i \in H^{2i}(BU(n); \mathbb{Z})$ будет обозначать стандартную образующую кольца $H^*(BU(n); \mathbb{Z})$, соответствующую i-му элементарному симметрическому многочлену. Аналогично, $w_i \in H^i(BO(n); \mathbb{Z}_2)$ обозначает стандартную образующую кольца $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2)$, соответствующую i-му элементарному симметрическому многочлену.

[5]В этом пункте мы не очень аккуратно относимся к символам t_i: в следствии 4.44 t было классом Черна канонического расслоения, а у нас расслоения вообще-то немного другие. Додумайте пропущенные детали самостоятельно.

Определение 5.1. Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное комплексное расслоение и пусть η классифицируется отображением $f\colon B \to BU(n)$. Элемент $c_i(\eta) \overset{\text{def}}{=} f^*(c_i) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ называется i-м классом Черна расслоения η. Формальная сумма $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + \dots + c_n(\eta) \in \bigoplus_i H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ называется полным классом Черна.

Определение 5.2. Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное вещественное расслоение и пусть η классифицируется отображением $f\colon B \to BO(n)$. Элемент $w_i(\eta) \overset{\text{def}}{=} f^*(w_i) \in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ называется i-м классом Штифеля–Уитни расслоения η. Формальная сумма $w(\eta) = 1 + w_1(\eta) + \dots + w_n(\eta) \in \bigoplus_i H^i(B;\mathbb{Z}_2)$ называется полным классом Штифеля–Уитни.

Из теорем 4.21 и 4.42 следует, что любой хар.класс комплексных расслоений (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) есть многочлен от классов Черна, а любой хар.класс вещественных расслоений (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) есть многочлен от классов Штифеля–Уитни.

Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное комплексная расслоение. Рассмотрим $t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)$ — формальные символы, такие что $\sigma_i(t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)) = c_i(\eta)$, где σ_i — i-й элементарный симметрический многочлен. Сами по себе $t_i(\eta)$ нигде не лежат, это просто символы. Однако, произвольный симметрический многочлен от этих элементов является корректно определенным когомологическим классом в B. Действительно, симметрический многочлен выражается через элементарные симметрические единственным образом, а значит в это выражение можно подставить классы Черна и подсчитать значение многочлена на них[6]. Символы $t_1(\eta), \dots, t_n(\eta)$ называются корнями Черна (или виртуальными классами Черна. Имеем тождество

$$c(\eta) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t_i(\eta)).$$

Аналогично определяются корни Штифеля–Уитни (виртуальные классы Штифеля–Уитни).

Предложение 5.3. *Пусть $\xi \oplus \eta$ — прямая сумма комплексных расслоений над базой B. Тогда $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta) \in H^{2*}(B;\mathbb{Z})$. Аналогично, для вещественных расслоений имеем $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta) \in H^*(B;\mathbb{Z}_2)$.*

Доказательство. Пусть n, k — размерности ξ и η соотв. Пусть $f\colon B \to BU(n)$ классифицирует ξ, а $g\colon B \to BU(k)$ классифицирует η. Из определения (см. замечание 4.27) следует, что расслоение $\xi \oplus \eta$ классифицируется композицией $B \xrightarrow{\Delta} B \times B \xrightarrow{f\times g} BU(n) \times BU(k) \xrightarrow{\imath} BU(n+k)$, где последнее отображение индуцировано естественным отображением $U(n) \times U(k) \to U(n+k)$, которое матрицам C, D сопоставляет блочную матрицу с блоками C, D. Пусть c_i — i-ая стандартная образующая

[6] На четномерных когомологиях $\smile$-произведение коммутативно, поэтому корректно определено значения многочленов от четномерных когомологических классов. В вещественном случае тоже нет проблемы: $\smile$-произведение когомологий над $\mathbb{Z}_2$ коммутативно во всех размерностях. В этих случаях мы не пишем значок $\smile$ — и так понятно, о каком умножении идет речь

кольца $H^*(BU(n)) \subset H^*(BU(n) \times BU(k))$, c'_i — i-ая стандартная образующая кольца $H^*(BU(k)) \subset H^*(BU(n) \times BU(k))$, а d_i — i-ая стандартная образующая кольца $H^*(BU(n+k))$. Из соображений универсальности достаточно доказать, что в кольце $H^*(BU(n) \times BU(k))$ выполнено соотношение

$$\sum_i \imath^* d_i = (\sum_i c_i)(\sum_i c'_i). \tag{5.1}$$

Имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^n \times T^k \arrow[r, equal] \arrow[d] & T^{n+k} \arrow[d] \\ U(n) \times U(k) \arrow[r] & U(n+k) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(BU(n+k)) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(BU(n) \times BU(k)) \arrow[d] \\ H^*(BT^{n+k}) \arrow[r, equal] & H^*(BT^n \times BT^k) \end{tikzcd}$$

Пусть $t_1, \dots, t_n$ — образующие кольца $H^*(BT^n)$, а $t'_1, \dots, t'_k$ — образующие кольца $H^*(BT^k)$. Таким образом, c_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от t_i, c'_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от t'_i, а d_i есть i-ая элементарная симметрическая функция от объединенного набора t_i, t'_i. Имеем $\sum_i c_i = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$, $\sum_i c'_i = \prod_{i=1}^k (1 + t'_i)$, а $\sum_i \imath^* d_i = \prod_{i=1}^n (1 + t_i) \prod_{i=1}^k (1 + t'_i)$. Тождество (5.1) становится очевидным. □

Замечание 5.4. Более эзотерическая формулировка Предложения 5.3 имеет такой вид: корни Черна расслоения $\xi \oplus \eta$ есть объединение корней Черна расслоения ξ и корней Черна расслоения η.

Следствие 5.5. *Пусть расслоение η расщепляется в прямую сумму одномерных $\eta = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$. Тогда $c(\eta) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$, где $t_i = c_1(\xi_i)$.*

Иными словами, для расщепимых расслоений корни Черна (соотв. Штифеля–Уитни) являются корректно определенными элементами группы $H^2(B; \mathbb{Z})$ (соотв. $H^1(B; \mathbb{Z}_2)$). Это просто первые классы Черна или Штифеля–Уитни одномерных слагаемых.

Упражнение 5.6. (а) Пусть $S\mathbb{Z}_2^n = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum \epsilon_i = 0 \mod 2\}$. Рассмотрев коммутативную диаграмму групп (слева) и соответствующих гомоморфизмов когомологий классифицирующих пространств (справа)

$$\begin{tikzcd} S\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{SO}(n) \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] & O(n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(B\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\ H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "="] & H^*(BS\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

докажите, что $H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n]$, $\deg w_i = i$, а гомоморфизм $H^*(BO(n); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \to H^*(B\,\mathrm{SO}(n); \mathbb{Z}_2)$ посылает w_1 в 0, а остальные образующие тождественно.

(б) Докажите, что вещественное векторное расслоение η ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\eta) = 0$.

Упражнение 5.7. Пусть $\mathrm{SU}(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Доказать, что структурную группу комплексного расслоения ξ можно редуцировать к $\mathrm{SU}(n)$ тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$.

5.2 Первые свойства

Переключимся для разнообразия на классы Штифеля–Уитни (для Черна все аналогично).

Предложение 5.8. *1. Если вещественное расслоение $\xi\colon E \to B$ тривиально, то $w(B) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}_2)$.*

2. Если η произвольно, а ξ тривиально, то $w(\eta \oplus \xi) = w(\eta)$.

3. Если n-мерное расслоение η допускает k линейно независимых сечений, то $w_i(\eta) = 0$ при $i > n - k$.

Доказательство. Первые два пункта очевидны из уже доказанного. Докажем (3). Набор k линейно независимых сечений $s_1, \ldots, s_k$ задает векторное подрасслоение ξ, слоем которого над $x \in B$ является линейная оболочка $\langle s_1(x), \ldots, s_k(x) \rangle$. Сечения $s_1, \ldots, s_k$ задают тривиализацию ξ, поэтому $w(\xi) = 1$. Пусть $\xi^\perp$ ортогональное дополнение к ξ в η (оно определено, потому что в слоях η можно ввести скалярное произведение, непрерывно зависящее от точек базы, см. Предложение 4.28), $\dim \xi^\perp = n - k$. Тогда $\eta = \xi \oplus \xi^\perp$, $w(\eta) = w(\xi^\perp)$. Но $w_i(\xi^\perp) = 0$ при $i > n - k$ по соображениям размерности. □

Замечание 5.9. Допустим, что сумма расслоений ξ и η является тривиальным расслоением. Тогда $w(\xi)w(\eta) = 1$ в $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$. Это можно расписать в виде цепочки тождеств

$$w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0,$$

$$w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0,$$

$$\ldots$$

$$w_n(\xi) + w_{n-1}(\xi)w_1(\eta) + \ldots + w_n(\eta) = 0, \ldots$$

Зная все $w_i(\xi)$, можно рекуррентно вычислить $w_i(\eta)$ однозначным образом. В связи с этим, мы будем говорить, что $w(\eta)$ является формально обратным к $w(\xi)$, и писать $w(\eta) = w(\xi)^{-1}$.

5.3 Касательные и нормальные расслоения

Ключевой пример векторного расслоения — касательное расслоение гладкого многообразия. Неформально говоря, касательное расслоение — это расслоение над гладким многообразием M, слоем которого над точкой $x \in M$ является касательное пространство T_xM.

Определение 5.10. Пусть M — гладкое многообразие, $M = \bigcup U_\alpha$, $\phi_\alpha \colon M \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — гладкий атлас, и $\psi_{\alpha,\beta} \colon V_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} V_{\beta,\alpha}$ — функции склейки. Рассмотрим векторное расслоение TM со слоем $\mathbb{R}^n$, базой M, тривиализующим атласом $\{U_\alpha\}$, и функциями перехода $\widetilde{\psi}_{\alpha,\beta,x} = \operatorname{Jac}_x \psi_{\alpha,\beta} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Векторное расслоение TM называется касательным расслоением многообразия M.

Упражнение 5.11. Гладкое многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда TM — ориентируемое векторное расслоение.

Упражнение 5.12. Доказать, что тотальное пространство касательного расслоения является гладким многообразием размерности $2n$.

Определение 5.13. Многообразие M называется почти комплексным, если TM — комплексное расслоение. Эквивалентно: M почти комплексное, если в касательном пространстве к каждой точке можно ввести оператор $J_x \colon T_xM \to T_xM$, $J_x^2 = -\operatorname{id}_{T_xM}$, непрерывно[7] зависящий от x.

Определение 5.14. Многообразие M называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально. Эквивалентно, M — параллелизуемо, если в TM существует $n = \dim M$ линейно независимых сечений.

Если $N \subset M$ — гладкое подмногообразие, то над N определены два векторных расслоения: $TN \subset TM|_N$, где $TM|_N$ — ограничение TM на N. Ортогональное дополнение к TN в $TM|_N$ (относительно некоторого скалярного произведения) называется нормальным расслоением подмногообразия N в M и обозначается $\nu_{N \subset M}$.[8]

Нормальное расслоение над N можно определить аналогичным образом для произвольного погружения $f \colon N \to M$.

В дальнейшем вместо $w(TM)$ и $c(TM)$ мы будем писать просто $w(M)$, $c(M)$.

5.4 Примеры вычислений и приложения

Упражнение 5.15. $c_k(\bar{\eta}) = (-1)^k c_k(\eta)$.

Проективные пространства Пусть $\gamma_1 \colon E \to \mathbb{R}P^n$ — каноническое одномерное расслоение над $\mathbb{R}P^k$. Как уже отмечалось в примере 4.30, $w_1(\eta) \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{k+1})$ есть образующая t кольца когомологий. По построению γ_1 есть подрасслоение в тривиальном расслоении $\underline{\mathbb{R}}^{n+1}$, состоящее из всех таких пар (l, x), где l — прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $x \in l$. Пусть $\gamma_1^\perp$ — ортогональное дополнение до γ_1 в $\mathbb{R}^{n+1}$. Имеем,

$$w(\gamma_1^\perp) = w(\gamma_1)^{-1} = (1+t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n.$$

Таким образом $\gamma_1^\perp$ дает пример расслоения, у которого все классы Штифеля–Уитни ненулевые.

[7] а чаще даже предполагается, что гладко

[8] Независимость от выбора скалярного произведения следует из утверждения $\nu_{N \subset M} \cong (TM|_N)/TN$. Справа стоит инвариантный объект

Лемма 5.16. $T(\mathbb{R}P^n) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$.

Доказательство. Касательное расслоение к проективному пространству можно отождествить с множеством точек $(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, $\|x\| = 1$, $v \in \langle x \rangle^\perp$ с точностью до отождествления $(x, v) \sim (-x, -v)$. Каждому такому классу можно сопоставить функционал $l\colon \langle x \rangle \to \langle x \rangle^\perp$, принимающий на x значение v. И наоборот. □

Предложение 5.17.

$$\underbrace{\gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_1}_{n+1} \cong T(\mathbb{R}P^n) \oplus \underline{\mathbb{R}}$$

Доказательство. Имеем $\mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \cong \underline{\mathbb{R}}$, поскольку оно одномерно, и в нем существует нигде не нулевое сечение, состоящее из тождественных операторов. Тогда

$$\begin{aligned} T(\mathbb{R}P^n) \oplus \underline{\mathbb{R}} &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp \oplus \gamma_1) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \mathbb{R}^{n+1}) \cong \bigoplus_{n+1} \mathrm{Hom}(\gamma_1, \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{n+1} \gamma_1, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где последнее следует из упражнения 4.33. □

Следствие 5.18. $w(\mathbb{R}P^n) = (1+t)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} t^i \in H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Упражнение 5.19. Описать классы Черна комплексного многообразия $\mathbb{C}P^n$.

Приведем некоторые интересные следствия.

Параллелизуемость Обнуление классов Штифеля–Уитни для проективных многообразий эквивалентно обнулению биномиальных коэффициентов по модулю 2. Для вычислений полезна

Теорема 5.20 (Теорема Люка́). *Пусть p — простое число, $a, b > 0$, $\overline{\ldots a_2 a_1 a_0}$ — p-ичная запись a, $\overline{\ldots b_2 b_1 b_0}$ — p-ичная запись b. Тогда $\binom{a}{b} \equiv \prod_i \binom{a_i}{b_i} \mod p$.*

Доказательство — хорошее упражнение по алгебре над полем $\mathbb{F}_p$. В случае $p = 2$ имеем $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} = \binom{0}{0} = 1$ и $\binom{0}{1} = 0$. Поэтому $\binom{a}{b} \equiv 1 \mod 2$ в том и только том случае, когда двоичная запись a поциферно мажорирует двоичную запись b.

Теорема 5.21 (Теорема Штифеля). $w(\mathbb{R}P^n) = 1$ *в том и только том случае, когда $n+1$ является степенью двойки.*

Доказательство. Упражнение. □

Как следствие, среди всех $\mathbb{R}P^n$ параллелизуемыми могут быть (но еще не факт, что будут!) только $\mathbb{R}P^1$,$\mathbb{R}P^3$,$\mathbb{R}P^7$,$\mathbb{R}P^{15}, \ldots$.

Алгебры с делением У проделанного вычисления есть приложение из казалось бы совсем далекой области. В алгебре рассматривают вещественные числа, комплексные числа (они задаются парой вещественных), кватернионы (задаются четверкой вещественных), октавы Кэли (задаются восьмеркой вещественных). Гамильтон, который в итоге придумал кватернионы, долго пытался изобрести теорию "трехмерных" чисел, но как-то оно не получалось. На то есть причина.

Теорема 5.22 (Теорема Штифеля)**.** *Допустим, что на $\mathbb{R}^n$ существует билинейная операция умножения $p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ без делителей нуля. Тогда $\mathbb{R}P^{n-1}$ параллелизуемо и, следовательно, $n = 2^k$.*

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — базис $\mathbb{R}^n$. Поскольку нет делителей нуля, отображения $r_i\colon y \mapsto p(y, b_i)$ задают линейные изоморфизмы $\mathbb{R}^n$ на себя. Зададим отображения $v_i = r_i \circ r_1^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Таким образом, $v_1(x) = x$ и при $x \neq 0$ векторы $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ линейно независимы. Отображения $v_2, \ldots, v_n$ задают $n-1$ линейно независимых сечений векторного расслоения $\mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^{\perp})$. Действительно, каждой прямой $l \subset \mathbb{R}^n$ сопоставим отображение $\tilde{v}_i\colon l \to l^{\perp}$ следующим образом: отобразим вектор $x \in l$ в ортогональную проекцию $v_i(x)$ на $l^{\perp}$. Имеем $\tilde{v}_1(x) = 0$, а $\tilde{v}_2(x), \ldots, \tilde{v}_n(x)$ образуют базис $l^{\perp}$. Таким образом $T(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathrm{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^{\perp})$ является тривиальным расслоением. □

Поскольку существуют комплексные числа, кватернионы и октавы, из теоремы следует, что $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^7$ действительно параллелизуемы. С другой стороны, уже более сложным способом доказывается, что $\mathbb{R}P^{2^k-1}$ не параллелизуемо при $k > 3$. Значит, алгебры с делением над $\mathbb{R}$ исчерпываются списком $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$

Погружения Приведем вначале классическую теорему Уитни.

Теорема 5.23 (Сильная теорема Уитни)**.** *Любое замкнутое гладкое многообразие M размерности n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Доказательство. Докажем слабую версию: существует погружение в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Вначале покажем, что существует вложение в $\mathbb{R}^N$ для какого-то N. Пусть $U_\alpha, \alpha \in A$ — гладкий атлас. Из компактности можно считать, что A конечно. Пусть $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ — координатные отображения, а $\psi_\alpha\colon M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$ — разбиение единицы, подчиненное атласу U_α, т.е. набор гладких функций, удовлетворяющий условиям $\psi_\alpha|_{M \setminus U_\alpha} = 0$, $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) = 1$, $\forall x \in M$. Пусть $\overline{\phi}_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{\phi}_\alpha(x) = (\phi_\alpha(x), 1)$. Рассмотрим отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^{(n+1)|A|}$, заданное формулой $F(x) = (\psi_1\phi_1, \ldots, \psi_{|A|}\phi_{|A|})$. Простая проверка показывает, что F — гладкое вложение.

Для прямой $l \in \mathbb{R}^N$ обозначим через pr_l отображение проекции $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1} = \mathbb{R}^N/l$. Пусть $\mathrm{Bad}(F)$ (соотв. $\mathrm{Bad}(F)'$) обозначает множество всех таких прямых $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых композиция $M \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_l} \mathbb{R}^{N-1}$ не является вложением (соотв. погружением). Проверяется, что $\dim \mathrm{Bad}(F) = 2n-1$, и $\dim \mathrm{Bad}(F)' = 2n$. Значит до тех пор пока $N - 1 > 2n - 1$ (соотв. $N - 1 > 2n$), можно выбрать направление проектирования так чтобы спроектированное отображение было снова погружением (соотв. вложением). Детали см. например в [7].

Чтобы получить погружение в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n}$ нужны более тонкие рассуждения. $\square$

Упражнение 5.24. Доказать, что T^n можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Возникает вопрос: насколько точна оценка размерности погружения, нельзя ли ее улучшить дальше? Классы Штифеля–Уитни дают препятствие к погружаемости.

Предложение 5.25. *Если многообразие $\mathbb{R}P^{2^k}$ погружается в $\mathbb{R}^{2^k+s}$, то $s \geqslant 2^k - 1$.*

Доказательство. Пусть ν — нормальное расслоение погружения $\mathbb{R}P^n$ в $\mathbb{R}^{n+s}$. Тогда $w(\nu) = w(T(\mathbb{R}P^n))^{-1} = (1+t)^{-(n+1)} = \sum_j \binom{j+n}{n} t^j$, согласно замечанию 5.9, следствию 5.18 и стандартному разложению функции $(1+t)^{-(n+1)}$ в ряд Тейлора. Подставляя $n = 2^k$, получаем

$$w_{2^k-1}(\nu) = \binom{2^{k+1}-1}{2^k} = 1 \mod 2,$$

поскольку двоичная запись числа $2^{k+1} - 1 = \overline{1\dots 1}$ поциферно мажорирует двоичную запись числа $2^k = \overline{10\dots 0}$. Поскольку нормальное расслоение имеет ненулевой класс $w_{2^k-1}(\nu)$, оно должно быть как минимум (2^k-1)-мерным. $\square$

Глобальная реализуемость многообразия системой функций По теореме о неявной функции, любое подмногообразие M, $\dim M = m$ в $\mathbb{R}^n$ *локально* задается как множество общих нулей системы $n - m$ гладких функций $f_1, \dots, f_{n-m} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, градиенты которых линейно независимы в точках многообразия.

Интересный вопрос: можно ли любое многообразие задать как множество нулей *глобально* определенных функций? Например, окружность можно так задать: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Предложение 5.26. *Пусть $f_1, \dots, f_{n-m} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гладкие функции, такие что* $\operatorname{grad}_x f_1$, *…,* $\operatorname{grad}_x f_{n-m}$ *линейно независимы для любой точки x, такой что $f_1(x) = \dots = f_{n-m}(x) = 0$. Тогда $w(M) = 1$, где $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_{n-m}(x) = 0\}$ — многообразие общих нулей.*

Доказательство. Градиенты функций задают $m - n$ линейно независимых сечений нормального расслоения $\nu_{M\subset\mathbb{R}^n}$. Значит нормальное расслоение тривиально и $w(\nu_{M\subset\mathbb{R}^n}) = 1$. Значит $w(M) = w(\nu_{M\subset\mathbb{R}^n})^{-1} = 1$. $\square$

У нас уже есть примеры многообразий с нетривиальными классами Штифеля–Уитни, например $\mathbb{R}P^n$ при $n \neq 2^k - 1$. Как видно, эти многообразия невозможно определить как множество нулей глобально заданных функций.

5.5 Когомологии конечномерных грассманианов

Вернемся к комплексному случаю и хар.классам Черна. Ранее мы посчитали когомологии бесконечномерных грассманианов: $H^*(G_{\infty,n};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_n], \deg c_i = 2i$. Теперь опишем когомологии конечномерных грассманианов.

Определим алгебру

$$R_{l,k} = \frac{\mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_l,d_1,\ldots,d_k]}{\left(\sum_{i+j=s} c_i d_j, s=1,\ldots,l+k\right)}, \quad \deg c_i = \deg d_i = 2i,$$

где в записи соотношений справа мы полагаем $c_0 = d_0 = 1$, $c_i = 0$ при $i > l$, $d_i = 0$ при $i > k$.

Упражнение 5.27. Докажите, что $R_{l,k}$ — конечномерное векторное пространство.

Напомним, что γ_n — каноническое расслоение над грассманианом, то есть расслоение вида $\{(\Pi, v) \in G_{m,n} \times \mathbb{C}^m \mid v \in \Pi\}$. Пусть $\gamma_n^\perp$ — ортогональное к нему, то есть $\{(\Pi, v) \in G_{m,n} \times \mathbb{C}^m \mid v \in \Pi^\perp\}$.

Теорема 5.28. *$H^*(G_{m,n};\mathbb{Z}) \cong R_{n,m-n}$*

Вначале введем классическую клеточную структуру на грассманиане.

Конструкция 5.29. Фиксируем флаг координатных подпространств

$$\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^{m-1} \subset \mathbb{C}^m.$$

Для подпространства $\Pi \in G_{m,n}$ рассмотрим набор чисел $s_1,\ldots,s_n$, где

$$s_i = \min\{k \in \{1,\ldots,m\} \mid \dim(\Pi \cap \mathbb{C}^k) = i\},$$

называемый символом подпространства Π и обозначаемый $\sigma(\Pi)$. Символ обладает очевидным свойством $1 \leqslant s_1 < \cdots < s_n \leqslant m$. Пусть σ — произвольный символ. Рассмотрим $U_\sigma = \{\Pi \in G_{m,n} \mid \sigma(\Pi) = \sigma\}$.

Упражнение 5.30. $U_\sigma \cong \mathbb{C}^{|\sigma|}$, где $|\sigma| = \sum_{i=1}^n (s_i - i)$.

Упражнение 5.31. Граница множества U_σ содержится в объединении U_τ с $\tau < \sigma$ (мы говорим, что $\tau \leqslant \sigma$, если $t_i \leqslant s_i$ для всех i).

Замыкание $\overline{U}_\sigma$ называется клеткой Шуберта. Упражнения показывают, что клетки Шуберта задают на $G_{m,n}$ структуру клеточного комплекса. Заметим, что все клетки четномерны — в этом случае говорят, что клеточная структура совершенна. В комплексе клеточных цепей (или коцепей) все дифференциалы бьют либо в нечетные размерности, либо из нечетных размерностей, а значит в случае совершенной клеточной структуры все дифференциалы нулевые, и мы имеем $H^{2j}(G_{m,n};\mathbb{Z}) \cong \mathcal{C}^{2j}(G_{m,n};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{d(m,n)}$, где $d(m,n)$ — число клеток размерности $2j$, то есть число символов σ, таких что $|\sigma| = j$.

Далее заметим, что вложение $G_{m,n} \to G_{m+1,n}$ отображает клетку $\overline{U}_\sigma$ первого грассманиана в одноименную клетку второго грассманиана. Поскольку шубертовы структуры согласованны, они в пределе задают клеточную структуру на бесконечномерном грассманиане $G_{\infty,n}$.

Лемма 5.32. *Отображение вложения* $\imath\colon G_{m,n} \to G_{\infty,n}$ *индуцирует эпиморфное отображение в когомологиях* $H^*(G_{\infty,n};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n] \to H^*(G_{m,n};\mathbb{Z})$, *которое отправляет стандартную образующую* c_i *в* i*-й класс Черна канонического расслоения:* $\imath^*(c_i) = c_i(\gamma_n)$.

Доказательство. Эпиморфность следует из того, что любая клетка Шуберта пространства $G_{m,n}$ является клеткой Шуберта пространства $G_{\infty,n}$ и обе клеточных структуры совершенны. Утверждение про класс Черна очевидно, поскольку каноническое расслоение γ_n классифицируется вложением $\imath\colon G_{m,n} \to G_{\infty,n}$. □

Рассмотрим коммутативную диаграмму алгебр

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n] \arrow[rr, "\imath^*"] \arrow[dr, "f"'] & & H^*(G_{m,n};\mathbb{Z}) \\ & R_{n,m-n} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_{m-n}]}{\left(\sum_{i+j=s} c_i d_j,\ s=1,\dots,m\right)} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

где f посылает c_i в c_i, а g устроено следующим образом: оно посылает c_i в $c_i(\gamma_n)$, а d_i посылается в $c_i(\gamma_n^\perp)$. Поскольку $\gamma_n \oplus \gamma_n^\perp \cong \underline{\mathbb{R}}^m$, имеем $\sum_{i+j=s} c_i(\gamma_n)c_j(\gamma_n^\perp) = 0$ при $s \geqslant 1$, а значит соотношения в $R_{n,m-n}$ посылаются в ноль и гомоморфизм g корректно определен.

Заметим, что все отображения в (5.3) эпиморфны. Эпиморфность $\imath^*$ уже доказана в Лемме 5.32, а эпиморфность g следует из коммутативности диаграммы. Эпиморфность f следует из того факта, что образующие d_i алгебры $R_{n,m-n}$ можно рекуррентно выразить через c_i, используя соотношения (см. замечание 5.9).

Докажем, что g — инъективно. Настало время deus ex machina.

Теорема 5.33. *Пусть* $\Bbbk$ — *поле*[9], $\Bbbk[y_1,\dots,y_m]$ — *алгебра многочленов от переменных степеней* $\deg y_i = d_i$. *Пусть* $\theta_1,\dots,\theta_m \in \Bbbk[y_1,\dots,y_m]$ — *однородные элементы степеней* $\deg\theta_i = s_i$, *такие что* $\Bbbk[y_1,\dots,y_m]/(\theta_1,\dots,\theta_m)$ *есть конечномерное векторное пространство*[10]. *Тогда* $\Bbbk[y_1,\dots,y_m]/(\theta_1,\dots,\theta_m)$ *является алгеброй Пуанкаре формальной размерности* $\sum_{i=1}^m s_i - \sum_{i=1}^m d_i$.

Алгебра $R_{n,m-n}$ (вернее $R_{n,m-n}\otimes\Bbbk$ для произвольного поля $\Bbbk$) порождена m однородными образующими, m однородными соотношениями и конечномерна (упр.5.27), а значит удовлетворяет требованиям приведенной теоремы. Следовательно, $R_{n,m-n}$ является алгеброй Пуанкаре формальной размерности

$$\sum_{i=1}^{m} 2i - \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{m-n} 2i = m(m+1) - n(n+1) - (m-n)(m-n+1) = 2n(m-n) = \dim G_{n,m-n}.$$

---

[9]вполне возможно, что для $\mathbb{Z}$ теорема тоже верна, но поручиться не могу

[10]такие элементы θ_i называются однородной системой параметров

Лемма 5.34. *Пусть $g\colon A^* \to B^*$ — эпиморфизм алгебр Пуанкаре одной формальной размерности d. Тогда g — изоморфизм.*

Доказательство. В старшей размерности $g\colon A^d \to B^d$ является изоморфизмом, поскольку $\dim A^d = \dim B^d = 1$. Допустим $a \in A^j$, $a \neq 0$, $g(a) = 0$. Тогда, поскольку A — это алгебра Пуанкаре, существует $a' \in A^{d-j}$, такой что $aa' \neq 0$. Тогда имеем $0 \neq g(aa') = g(a)g(a') = 0 \cdot g(a') = 0$ — противоречие. Значит g инъективен. □

Значит гомоморфизм $g\colon R_{n,m-n} \to H^*(G_{m,n};\mathbb{Z})$ является изоморфизмом и Теорема 5.28 доказана[11].

5.6 Когомологии многообразий полных флагов

Пусть $F_n = F_{n;1,\dots,n}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$.

Упражнение 5.35. Доказать, что гомоморфизм $H^*(F_{\infty;1,\dots,n};\mathbb{Z}) \to H^*(F_n;\mathbb{Z})$, индуцированный вложением $F_n \hookrightarrow F_{\infty;1,\dots,n}$, является эпиморфизмом.

Теорема 5.36. *$H^*(F_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]/(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, где $\deg t_i = 2$, а σ_i — i-й элементарный симметрический многочлен от $t_1,\dots,t_n$.*

Доказательство. Заметим, что $H^*(F_{\infty;1,\dots,n};\mathbb{Z}) = H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$ (см. доказательство Теоремы 4.42). Пусть ξ_i — i-е каноническое расслоение над F_n, то есть расслоение, слоем которого над флагом $W_1 \subset \dots \subset W_n$ является одномерное пространство W_i/W_{i-1}. Заметим, что $\bigoplus_{i=1}^n \xi_i = \underline{\mathbb{C}}^n$, поэтому $\prod_{i=1}^n (1 + c_1(\xi_i)) = 1$ в $H^*(F_n;\mathbb{Z})$. Иными словами, $\sigma_i(c_1(\xi_1),\dots,c_1(\xi_n)) = 0$ при $i > 0$. Значит корректно определен кольцевой гомоморфизм
$$g\colon \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]/(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \to H^*(F_n;\mathbb{Z}).$$
посылающий t_i в $c_1(\xi_i)$. Из упр.5.35 следует, что g сюръективен. Из Теоремы 5.33 следует, что $\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]/(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ — алгебра Пуанкаре формальной размерности $n(n-1) = \dim F_n$. Значит, из Леммы 5.34 следует, что g — изоморфизм. □

Упражнение 5.37. Описать кольцо когомологий многообразия $F_{m;j_1,\dots,j_k}$ для произвольных $j_1 < \ldots < j_k \leqslant m$.

5.7 Классы Понтрягина

Пусть η — вещественное векторное расслоение размерности n над B. Рассмотрим его комплексификацию $\eta_{\mathbb{C}} = \eta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (в смысле общекатегорной конструкции 4.26). Тогда $\eta_{\mathbb{C}}$ — комплексное расслоение комплексной размерности n.

Заметим, что $\eta_{\mathbb{C}} \cong \overline{\eta_{\mathbb{C}}}$, а значит $2c_i(\eta_{\mathbb{C}}) = 0$ при нечетных i (см. упражнение 5.15). Игнорируя элементы порядка два, дадим следующее определение

[11] Вообще-то мы доказали, что $R_{n,m-n} \otimes \Bbbk \cong H^*(G_{m,n};\Bbbk)$. Доказательство для $\mathbb{Z}$ предлагается извлечь из формулы универсальных коэффициентов и наличия совершенной клеточной структуры самостоятельно.

Определение 5.38. i-м классом Понтрягина вещественного расслоения η называется элемент $p_i(\eta) = (-1)^i c_{2i}(\eta_{\mathbb{C}}) \in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$.

Формальная сумма $1+p_1(\eta)+\ldots+p_{[n/2]}(\eta)$ называется полным классом Понтрягина. Поскольку классы Черна — характеристические, а операция комплексификации естественна, классы Понтрягина также являются характеристическими классами (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$).

Упражнение 5.39. Элемент $p(\eta_1 \oplus \eta_2)$ сравним с $p(\eta_1)p(\eta_2)$ по модулю элементов порядка 2. Иными словами, $2(p(\eta_1 \oplus \eta_2) - p(\eta_1)p(\eta_2)) = 0$.

Упражнение 5.40. Пусть ξ — комплексное расслоение. Тогда $(\xi_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \bar{\xi}$. Вывести отсюда, что для комплексных расслоений выполнено

$$1 - p_1 + p_2 - p_3 + \cdots = (1 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots)(1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots)$$

6 Характеристические числа и бордизмы

6.1 Характеристические числа

Числа Штифеля–Уитни Пусть $w_i(M) \in H^i(M;\mathbb{Z}_2)$ — классы Штифеля–Уитни n-мерного замкнутого гладкого многообразия M. Пусть $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$ — разбиение числа n, то есть неупорядоченный набор натуральных чисел, дающих в сумме n. Далее $\mathcal{P}(n)$ обозначает множество всех разбиений числа n.

Для любого $J \in \mathcal{P}(n)$ рассмотрим когомологический класс $\prod_{j\in J} w_j(M) \in H^n(M;\mathbb{Z}_2)$. Его спаривание с $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z}_2)$ называется характеристическим числом Штифеля–Уитни, соответствующим последовательности J (очевидно, это число лежит в $\mathbb{Z}_2$), и обозначается $w_J(M)$.

Упражнение 6.1. Описать числа Штифеля–Уитни для $\mathbb{R}P^n$.

Абсолютно аналогично можно определить числа Черна $2n$-мерного комплексного многообразия и числа Понтрягина $4n$-мерного ориентируемого многообразия:

$$c_J(M^{2n}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \prod_{j\in J} c_j(TM), [M] \rangle \in \mathbb{Z},$$

$$p_J(M^{4n}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \prod_{j\in J} p_j(TM), [M] \rangle \in \mathbb{Z},$$

где $J \in \mathcal{P}(n)$.

Теорема 6.2 (Теорема Понтрягина)**.** *Пусть B — гладкое $(n+1)$-мерное многообразие с краем $M = \partial B$. Тогда все числа Штифеля–Уитни многообразия M равны нулю.*

Доказательство. Пусть $[B] \in H_{n+1}(B, M)$, $[M] \in H_n(M)$ — фундаментальные классы. Связывающий гомоморфизм $\partial\colon H_{n+1}(B, M) \to H_n(M)$ переводит $[B]$ в $[M]$. Для любого класса $v \in H^n(M)$ справедливо $\langle v, [M] \rangle = \langle v, \partial[B] \rangle = \langle \delta v, [B] \rangle$, где $\delta\colon H^n(M) \to H^{n+1}(B, M)$ — связывающий гомоморфизм в когомологиях.

Имеем $TB|_M = TM \oplus \epsilon$, где ϵ — тривиальное нормальное расслоение к краю (тривиальность следует из того факта, что можно выбрать нормальный вектор в каждой точке, смотрящий внутрь многообразия B). Поэтому хар.классы расслоений $TB|_M$ и TM совпадают. Из отрезка точной последовательности

$$H^n(B) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M)$$

имеем $\delta(w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}) = 0$ и следовательно

$$\langle w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}, [M] \rangle = \langle \delta w_1(M)^{k_1} \cdots w_n(M)^{k_n}, [B] \rangle = 0,$$

что и требовалось. □

Теорема 6.3 (Теорема Тома). *Пусть все числа Штифеля–Уитни многообразия M равны нулю. Тогда M является границей некоторого многообразия.*

Конкретно эту теорему мы не докажем, но идеи обрисуем.

6.2 Неориентированные бордизмы

Определение 6.4. Скажем, что (гладкое замкнутое) многообразие M_1^n O-бордантно M_2^n, если существует такое многообразие с краем W^{n+1}, что $\partial W = M_1 \sqcup M_2$. В этом случае будем писать $M_1 \sim_O M_2$. Говорят, что W — это бордизм между M_1 и M_2.

Упражнение 6.5. Докажите, что $\sim_O$ есть отношение эквивалентности на множестве многообразий.

Упражнение 6.6. $w_J(M_1 \sqcup M_2) = w_J(M_1) + w_J(M_2)$.

Имеем следствие из теоремы Понтрягина

Следствие 6.7. *Если $M_1 \sim_O M_2$, то $w_J(M_1) = w_J(M_2)$.*

А из не доказанной пока теоремы Тома следует утверждение в обратную сторону: если у двух многообразий совпадают все числа Штифеля–Уитни, то они O-бордантны.

Заметим, что классы O-бордантности образуют градуированное кольцо, которое обозначается Ω_O^*. В качестве суммы берется дизъюнктное объединение многообразий, а в качестве произведения — декартово произведение (упр. проверить, что эти операции опускаются на классы бордизма). Нулем служит пустое многообразие. Заметим также, что порядок каждого элемента (по сложению) равен 2, т.к. $2M = M + M = M \sqcup M$ является границей трубы $W = M \times [0; 1]$, и следовательно $2M = 0$. Значит, в действительности Ω_O^* является алгеброй над $\mathbb{Z}_2$.

Каждое число Штифеля–Уитни w_J, $J \in \mathcal{P}(n)$ задает аддитивный гомоморфизм $w_J\colon \Omega_O^* \to \mathbb{Z}_2$.

Упражнение 6.8. Связной суммой $M \# N$ многообразий M и N одной размерности называется многообразие, получаемое вырезанием маленьких дисков из M и N и склеиванием по полученной границе. Докажите, что $M \# N$ бордантна $M \sqcup N$.

6.3 Ориентированные бордизмы

Определение 6.9. Скажем, что два ориентированных (гладких замкнутых) многообразия M_1^n и M_2^n SO-бордантны, если существует такое ориентированное многообразие с краем W^{n+1}, что $\partial W = M_1 \sqcup (-M_2)$, где $-M_2$ — это многообразие M_2 с обращенной ориентацией. В этом случае будем писать $M_1 \sim_{\mathrm{SO}} M_2$.

Абсолютно аналогично можно определить градуированное кольцо ориентированных бордизмов Ω_{SO}^*, элементы которого — классы SO-бордизма, а операции — дизъюнктное объединение и декартово произведение. Это уже алгебра над $\mathbb{Z}$, а не над $\mathbb{Z}_2$. Абсолютно аналогично предыдущей ситуации доказывается

Теорема 6.10. *Пусть B — гладкое ориентированное $(4n+1)$-мерное многообразие с краем $M^{4n} = \partial B$. Тогда все числа Понтрягина многообразия M равны нулю.*

Следствие 6.11. *Если $M_1^{4n} \sim_{\mathrm{SO}} M_2^{4n}$, то $p_J(M_1) = p_J(M_2)$ для всех $J \in \mathcal{P}(n)$.*

Доказательство. (1) Заметим, что $p_J(A \sqcup B) = p_J(A) + p_J(B)$. (2) $p_J(-M) = -p_J(M) \in \mathbb{Z}$, поскольку классы Понтрягина при смене ориентации не меняются (т.к. не меняется комплексификация касательного расслоения), а фундаментальный класс меняет знак. Дальнейшее очевидно. □

Таким образом каждое число Понтрягина задает аддитивный гомоморфизм

$$p_J \colon \Omega_{\mathrm{SO}}^{4n} \to \mathbb{Z}, \qquad J \in \mathcal{P}(n).$$

6.4 Комплексные бордизмы

Тут надо правильно определить категорию рассматриваемых многообразий: если M — граница B, то либо у M, либо B размерность нечетная, и пока неясно, как там вводить комплексную структуру. Чтобы эту проблему обойти, вводится следующее

Определение 6.12. Многообразие M называется стабильно почти комплексным (или просто стабильно комплексным), если фиксирован изоморфизм вещественных расслоений $TM \oplus \underline{\mathbb{R}^k} \cong \eta$, где η — комплексное расслоение (иными словами, на TM после добавления тривиального слагаемого введена комплексная структура).

Две стабильно комплексные структуры $TM \oplus \underline{\mathbb{R}^{k_1}} \cong \eta_1$ и $TM \oplus \underline{\mathbb{R}^{k_2}} \cong \eta_2$ называются эквивалентными, если они стабилизируются добавлением тривиального комплексного расслоения:

$$\eta_1 \oplus \underline{\mathbb{C}^{m_1}} \cong_{\mathbb{C}} \eta_2 \oplus \underline{\mathbb{C}^{m_2}}.$$

Эквивалентные стабильно комплексные структуры не различаются.

Замечание 6.13. Стабильно комплексная структура определяет ориентацию.

Стабильно комплексная структура позволяет определить классы Черна $c_j(M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_j(\eta)$, и как следствие числа Черна, если M четномерно.

Замечание 6.14. Надо помнить, что стабильно комплексная структура — это дополнительная информация, привязанная к гладкому многообразию (точно так же, как структура гладкости — это дополнительная информация на топологическом многообразии). На одном гладком многообразии могут быть разные, т.е. неэквивалентные, стабильно комплексные структуры. Например на $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ есть структура

$$TS^2 \oplus \nu_{S^2\subset\mathbb{R}^3} \oplus \underline{\mathbb{R}^1} \cong \underline{\mathbb{R}^4} \cong \underline{\mathbb{C}^2}.$$

а есть также стандартная комплексная структура:

$$TS^2 \cong T\mathbb{C}P^1.$$

У первой c_1 тривиален, у второй — нет, значит они различные.

Более того, существуют многообразия (даже ориентируемые), на которых вообще нет ни одной стабильно комплексной структуры.

Определение 6.15. Стабильно комплексные многообразия M_1, M_2 называются U-бордантными, если существует стабильно комплексное многообразие W с краем, такое что $\partial W = M_1 \sqcup (-M_2)$. Здесь предполагается, что ограничение стабильно комплексной структуры с W на M_1, M_2 должно давать заданные структуры на этих многообразиях.

Многообразие $-M$ определяется следующим образом. Пусть M многообразие со стабильно комплексной структурой $TM \oplus \underline{\mathbb{R}^k} \xrightarrow{a} \eta$. Тогда $-M$ — это многообразие M со стабильно комплексной структурой $TM \oplus \underline{\mathbb{R}^k} \oplus \underline{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{a\oplus b} \eta \oplus \underline{\mathbb{C}^1}$, $b(x,y) = x - iy$. Суть этого странного формализма очень простая: у $-M$ фактически та же стабильная комплексная структура, что и у M, зато эта структура индуцирует противоположную ориентацию.

Упражнение 6.16. Докажите, что $\sim_U$ есть отношение эквивалентности.

Классы U-бордантных стабильно комплексных многообразий образуют кольцо Ω_U^*.

Абсолютно аналогично предыдущим утверждениям доказывается

Предложение 6.17. *Если $M_1^{2n} \sim_U M_2^{2n}$, то $c_J(M_1) = c_J(M_2)$ для всех $J \in \mathcal{P}(n)$. Как следствие, c_J задает гомоморфизм из $\Omega_U^{2n} \to \mathbb{Z}$.*

6.5 Отсутствие линейных соотношений на характеристические числа

Для определенности мы работаем с классами и числами Черна, хотя рассуждения до некоторого момента будут аналогичными и в случае Понтрягина и Штифеля–Уитни.

Довольно удобно вместо набора $\{c_J(M) \mid J \in \mathcal{P}(n)\}$ использовать другой базис характеристических чисел, который мы сейчас построим. Заметим, что по определению $c_J(M) = \langle \prod_{j\in J} c_j(TM), [M]\rangle$, а $\prod_{j\in J} c_j(TM) = \prod_{j\in J} \sigma_j(t_1, \dots, t_n)$, произведение элементарных симметрических многочленов от корней Черна. Всевозможные произведения элементарных симметрических многочленов, имеющие заданную степень n, образуют базис группы симметрических многочленов степени n. Мы можем взять другой базис:

$$s_J(t_1,\dots,t_n) = \text{ “симметризация” монома } \prod_{i=1}^{n} t_i^{j_i},$$

где, как и раньше, $J=\{j_1,\dots,j_n\}\in\mathcal{P}(n)$ (суммируем по всем перестановкам которые дают новые мономы). Подставляя в симметрический многочлен s_J вместо формальных переменных корни Черна заданного расслоения ξ, получаем корректно определенный хар.класс $s_J(\xi)$. В частности, касательное расслоение дает хар.число $s_J(M) \stackrel{\text{def}}{=} \langle s_J(TM),[M]\rangle$.

Пример 6.18. При $n=3$ имеется базис группы симметрических многочленов степени 3 вида

$$c_{1,1,1}=(t_1+t_2+t_3)^3, \quad c_{1,2}=(t_1+t_2+t_3)(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3), \quad c_3=t_1t_2t_3.$$

А есть базис

$$s_{1,1,1}=t_1t_2t_3, \quad s_{1,2}=t_1t_2^2+t_1^2t_2+t_1t_3^2+t_1^2t_3+t_2t_3^2+t_2^2t_3, \quad s_3=t_1^3+t_2^3+t_3^3.$$

Одно через другое выражается. Например

$$s_3=(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)+3t_1t_2t_3=c_{1,1,1}-3c_{1,2}+3c_3.$$

Как следствие, $s_3(M)=c_{1,1,1}(M)-3c_{1,2}(M)+3c_3(M)$.

Видно, что базисы разные, но, как и положено, один через другой линейно выражается. Поэтому набор хар.чисел $\{c_J(M)\}$ несет в точности ту же информацию, что и набор $\{s_J(M)\}$.

Замечание 6.19. Легко заметить, что при $J=n$ (т.е. тривиальное разбиение числа n), многочлен $s_J=s_n$ есть просто многочлен Ньютона. Соответствующее ему хар.число играет в топологии многообразий важную роль.

Нам потребуются следующие факты:

Упражнение 6.20.

1. $s_J(\xi\oplus\eta)=\sum_{IK=J}s_I(K)s_K(\eta)$ (запись IK обозначает композицию двух разбиений, определенную естественным образом: например, если $I=(1,1,3,4)$, а $K=(1,2,5)$, то $IK=(1,1,3,4,1,2,5)=(1,1,1,2,3,4,5)$);
2. В частности, $s_n(\xi\oplus\eta)=s_n(\xi)+s_n(\eta)$.
3. $s_J(M^{2m}\times N^{2n})=\sum_{IK=J}s_I(M)s_K(N)$, где $I\in\mathcal{P}(m)$, $K\in\mathcal{P}(n)$.
4. В частности, $s_m(M)=0$, если M представимо в виде произведения стабильно комплексных многообразий положительной размерности (т.е. является разложимым элементом в кольце кобордизмов Ω_U^*).

Упражнение 6.21. Доказать, что $s_n(\mathbb{C}P^n)\neq 0$.

Лемма 6.22. *(Том) На числа $c_J(M^{2n})$, $J \in \mathcal{P}(n)$ не существует линейных соотношений. Ранг группы бордизмов Ω_U^{2n} как минимум $|\mathcal{P}(n)|$.*

Доказательство. Поскольку хар.числа $\{s_J(M)\}$ и хар.числа $\{c_J(M)\}$ друг через друга линейно выражаются, достаточно проверить утверждение для чисел $s_J(M)$. Для доказательства достаточно предъявить $|\mathcal{P}(n)|$ многообразий M_I, $I \in \mathcal{P}(n)$, таких, что квадратная матрица $(c_J(M_I))_{I,J\in\mathcal{P}(n)}$ невырождена. Положим

$$M_I = \prod_{i\in I} \mathbb{C}P^i.$$

Утверждается, что уже такие многообразия позволяют различать классы Черна. Имеем

$$s_J(M_I) = s_J(\mathbb{C}P^{i_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{i_l}) = \sum_{J_1\cdots J_l = J} s_{J_1}(\mathbb{C}P^{i_1})\cdots s_{J_l}(\mathbb{C}P^{i_l}), \quad J_r \in \mathcal{P}(i_r)$$

согласно упр. 6.20. Таким образом, $s_J(M_I) = 0$ если J не является измельчением I.

Упражнение 6.23. Доказать, что множество всех разбиений $\mathcal{P}(n)$ можно линейно упорядочить, так чтобы матрица $A = (c_J(M_I))_{I,J\in\mathcal{P}(n)}$ (порядок на $\mathcal{P}(n)$ нужен для определения порядка ее строк и столбцов) была нижнетреугольной с ненулевыми диагональными элементами.

Как следствие, получаем, что многообразия M_I линейно независимы в Ω_U^{2n} □

Аналогичное утверждение можно сформулировать и доказать и для классов Понтрягина.

Лемма 6.24. *(Том) На числа $p_J(M^{4n})$, $J \in \mathcal{P}(n)$ не существует линейных соотношений. Ранг группы бордизмов $\Omega_{\mathrm{SO}}^{4n}$ как минимум $|\mathcal{P}(n)|$.*

В качестве различающих многообразий здесь берутся все возможные произведения $\mathbb{C}P^{2i}$.

Замечание 6.25. А вот в неориентированной ситуации ответ посложнее. Заметим, например, что любое 1-мерное многообразие имеет $w_1(M) = 0$. Поэтому говорить о линейной независимости всех чисел Штифеля–Уитни уже нельзя. Можно также доказать, что любое характеристическое число Штифеля–Уитни 3-мерного многообразия равно нулю.

Аналогом предыдущих теорем является такое утверждение: имеется $|\widetilde{\mathcal{P}}(n)|$ многообразий, линейно независимых в группе Ω_O^n, и различаемых числами Штифеля–Уитни. Здесь $\widetilde{\mathcal{P}}(n)$ — множество разбиений числа n, не содержащих слагаемых вида $2^k - 1$.

6.6 Конструкция Понтрягина–Тома

Чтобы пояснить теоремы Тома из предыдущих параграфов, достаточно проверить, что $\operatorname{rk}\Omega^{4n}_{\mathrm{SO}} = |\mathcal{P}(n)|$ (в ориентированном случае), $\operatorname{rk}\Omega^{2n}_{U}|\mathcal{P}(n)|$ (в комплексном случае) и $\Omega^n_O \cong (\mathbb{Z}_2)^{|\widetilde{\mathcal{P}}(n)|}$ (в неориентированном случае). С теми или иными модификациями это делается с помощью конструкции Понтрягина–Тома, которую мы обрисуем в ориентированном случае.

Конструкция 6.26 (Пространство Тома). Пусть $\xi\colon E \to B$ — векторное расслоение. Пространством Тома $M\xi$ называется одноточечная компактификация его тотального пространства. Если на ξ выбрано скалярное произведение, то $M\xi$ можно отождествить с пространством $D\xi/S\xi$, где $D\xi$ — ассоциированное расслоение единичных дисков, а $S\xi = \partial D\xi$ — ассоциированное расслоение единичных сфер. Каждое пространство Тома автоматически получает отмеченную точку (∞ в одноточечной компактификации).

Универсальным пространством Тома $M\,\mathrm{SO}(k)$ называется пространство Тома универсального расслоения $\gamma_k\colon E \to B\,\mathrm{SO}(k)$ (т.е. канонического расслоения над грассманианом ориентированных плоскостей).

Теорема 6.27. *Пусть $k > n+1$. Тогда $\Omega^n_{\mathrm{SO}} \cong \pi_{n+k}(M\,\mathrm{SO}(k))$.*

Заметим, что эта теорема верна для всех n, а не только кратных 4, как было раньше.

Доказательство. Приведем основные идеи. Во-первых, вместо бесконечномерного пространства $M\,\mathrm{SO}(k)$ можно рассматривать его конечномерные приближения, а именно пространства Тома $M\gamma_k$ канонических расслоений над конечномерными грассманианами $\tilde{G}_{m,k}$. Заметим, что вне выделенной точки $\mathrm{pt} = \infty \in M\gamma_k$ пространство $M\gamma_k$ является гладким многообразием, причем в качестве нулевого сечения в нем гладко лежит сам грассманиан $\tilde{G}_{m,k}$.

Пусть $f\colon S^{n+k} \to M\gamma_k$ произвольный сфероид, т.е. представитель элемента гомотопической группы $\pi_{n+k}(M\gamma_k)$. Небольшим шевелением f можно добиться, чтобы сфероид стал гладким вне ∞ и трансверсальным к нулевому сечению $\tilde{G}_{m,k} \subset M\gamma_k$. В пересечении сфероида и нулевого сечения получается гладкое многообразие M_f, причем его коразмерность в сфероиде равна коразмерности $\tilde{G}_{m,k}$ в $M\gamma_k$, т.е. рангу расслоения, т.е. k. Значит мы по сфероиду f получили гладкое многообразие M_f размерности n. Ориентация этого многообразия легко извлекается из ориентации γ_k.

Теперь надо проверить, что такое сопоставление задает корректный гомоморфизм

$$a\colon \pi_{n+k}(M\gamma_k) \to \Omega^n_{\mathrm{SO}}.$$

Пусть f_0 и f_1 — гомотопные сфероиды и пусть $F\colon S^{n+k} \times [0,1] \to M\gamma_k$ — гомотопия между ними. Эту гомотопию опять же можно пошевелить так, чтобы она стала трансверсальна нулевому сечению. Многообразие с краем, которое эта гомотопия высекает на нулевом сечении, дает ориентированный бордизм между M_{f_0} и M_{f_1}.

Упражнение 6.28. Понять, почему a является гомоморфизмом групп.

Осталось проверить, что a сюръективно и инъективно. Сюръективность: нужно проверить, что любое замкнутое многообразие можно высечь на нулевом сечении в $M\gamma_k$ некоторым сфероидом.

Пусть $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ произвольное гладкое вложение (при $k > n+1$ существует по теореме Уитни). Заметим, что нормальное расслоение $\nu_{M\subset\mathbb{R}^{n+k}}$ классифицируется гауссовым отображением $g\colon M \to \tilde{G}_{n+k,k}$, $x \mapsto \nu_x M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, где $\nu_x M \cong \mathbb{R}^k$ — нормальное подпространство к M в $\mathbb{R}^{n+k}$ (это более-менее тавтология). Нам потребуется следующий технический, но интуитивно понятный результат.

Теорема 6.29 (Теорема о трубчатой окрестности)**.** *Пусть M — гладкое подмногообразие в N. Тогда существует открытая окрестность M в N, диффеоморфная тотальному пространству E нормального расслоения к M при диффеоморфизме, который переводит каждую точку M в нулевой нормальный вектор к этой точке.*

Замкнем $\mathbb{R}^{n+k}$ до сферы S^{n+k}, добавив одну точку. Пусть $U \supset M$ — трубчатая окрестность подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset S^{n+k}$. По теореме о трубчатой окрестности, получаем $S^{n+k}/(S^{n+k}\backslash U) \cong M\nu_{M\subset\mathbb{R}^{n+k}}$. Имеем последовательность отображений

$$S^{n+k} \to S^{n+k}/(S^{n+k}\backslash U) \cong M\nu_{M\subset\mathbb{R}^{n+k}} \overset{Mg}{\to} M\gamma_k.$$

Упражнение 6.30. Понять, что полученный сфероид в точности высекает в нулевом сечении пространства Тома $M\gamma_k$ исходное многообразие M.

Тем самым сюръективность $a\colon \pi_{n+k}(M\gamma_k) \to \Omega^n_{\mathrm{SO}}$ доказана.

Инъективность: надо показать, что если $M = \partial N$, то соответствующий сфероид в $M\gamma_k$ стягиваем. Это делается абсолютно аналогичными рассуждениями, как и для сюръективности, только тут потребуется версия теоремы о вложении для многообразий с краем:

Теорема 6.31 (см.[6, Т.4.3.])**.** *Пусть N многообразие размерности n с краем ∂N. Тогда существует правильное вложение N в полупространство $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ при $m \geqslant 2n$. (Правильность означает, что край переходит в край, внутренние точки — во внутренние точки, N втыкается в край полупространства трансверсально, и ограничение вложения на край дает гладкое вложение $\partial N \to \mathbb{R}^m$.)*

Упражнение 6.32. Доказать инъективность гомоморфизма a.

□

Замечание 6.33. И утверждение и доказательство в O-случае и U-случае абсолютно аналогичны, только необходимо рассматривать пространства Тома $MO(k)$ и $MU(k)$ универсальных $O(k)$ и $U(k)$-расслоений соответственно.

Упражнение 6.34. Докажите, что $M(\xi \times \eta) \cong M\xi \wedge M\eta$, и, как следствие, $M(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}^n}) \cong \Sigma^n M\xi$. ($\wedge$ обозначает приведенное произведение пунктированных пространств: $A \wedge B = A \times B / A \vee B$)

Явное вычисление гомотопических групп пространств Тома, а именно проверку, что $\operatorname{rk}\pi_{4n+k}(M\,\mathrm{SO}(k)) = \operatorname{rk}\pi_{2n+k}(MU(k)) = |\mathcal{P}(n)|$ мы пока отложим.

Упражнение 6.35. Пространство Тома $M\,\mathrm{SO}(k)$ $(k-1)$-связно.

Упражнение 6.36. Пусть X — конечный $(k-1)$-связный клеточный комплекс, $k \geqslant 2$. Тогда гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_r(X) \to H_r(X;\mathbb{Z})$ имеет конечное ядро и коядро при $r < 2k-1$.

Упражнение 6.37. При больших k ранг группы $\pi_{n+k}(M\,\mathrm{SO}(k))$ равен рангу группы $H^{n+k}(M\,\mathrm{SO}(k);\mathbb{Z})$.

6.7 Бордизмы пространства

Обобщенные теории (ко)гомологий Обобщенной теорией гомологий называется ковариантный функтор h_* из категории пар клеточных комплексов (с произвольными непрерывными отображениями пар в качестве морфизмов) в категорию $\mathbb{Z}$-градуированных модулей, обладающий следующими свойствами: (1) Гомотопическая инвариантность: если $f \simeq g\colon (X,A) \to (Y,B)$, то $f_* = g_*\colon h_*(X,A) \to h_*(Y,B)$; (2) Точная последовательность пары:

$$\cdots \to h_n(A,\varnothing) \xrightarrow{i_*} h_n(X,\varnothing) \xrightarrow{p_*} h_n(X,A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(X,\varnothing) \to \cdots$$

где $h_n(X) = h_n(X,\varnothing)$; (3) Вырезание: $h_*(X,A) \xrightarrow{p_*} h_*(X/A,\mathrm{pt})$ — изоморфизм; (4) Аддитивность: если (X_α, A_α) — семейство пар, и $i_\alpha\colon (X_\alpha,A_\alpha) \hookrightarrow \bigsqcup_\alpha (X_\alpha,A_\alpha)$ естественные включения, то $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_*\colon \bigoplus_\alpha h_*(X_\alpha,A_\alpha) \to h_*(\bigsqcup_\alpha (X_\alpha,A_\alpha))$ — изоморфизм. Аналогично определяется обобщенная теория когомологий.

Спектры Спектром называется последовательность пунктированных клеточных комплексов $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вместе с фиксированными структурными отображениями $r\colon \mathcal{E}_k \wedge S^1 \to \mathcal{E}_{k+1}$. Спектр называется сходящимся, если $\exists m$ т.ч. комплекс $\mathcal{E}_{m+k}$ k-связен. В дальнейшем предполагается, что спектр сходится.

Упражнение 6.38. Докажите, что (а) группы $E_n(X,A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}((X/A) \wedge \mathcal{E}_k)$ задают обобщенную теорию гомологий (б) группы $E^n(X,A) = \lim_{k\to\infty}[(X/A) \wedge S^{k-n}, \mathcal{E}_k]$ задают обобщенную теорию когомологий.

На самом деле верно и обратное: каждая обобщенная теория (ко)гомологий задается некоторым спектром [9].

Упражнение 6.39. Докажите, что стабильные гомотопические группы являются обобщенной теорией гомологий, а просто гомотопические группы — нет.

Упражнение 6.40. (а) Докажите, что пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z},n)$ образуют спектр, и задаваемые ими теория (ко)гомологий — это классические (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. (б) Докажите, что пространства $M\,\mathrm{SO}(k)$ образуют спектр.

Геометрические бордизмы Пусть (X, A) клеточная пара. Определим $\Omega^n_{\mathrm{SO}}(X, A)$ — группа геометрических бордизмов в X. Элементы $\Omega_n^{\mathrm{SO}}(X, A)$ — это всевозможные непрерывные отображения $f\colon M^n \to X$, где M — гладкое ориентированное многообразие, $f(\partial M) \subset A$. Два элемента $f_1\colon M_1 \to X$ и $f_2\colon M_2 \to X$ считаются эквивалентными, если существует $F\colon N^{n+1} \to X$, где N — гладкое многообразие, $M_1, -M_2$ — подмногообразия в ∂N, $F|_{M_1} = f_1$, $F|_{M_2} = f_2$, и $F(\partial N \backslash (M_1 \sqcup M_2)) \subset A$. Сумма задается дизъюнктным объединением. Очевидно, что конструкция функториальна: отображение пар $(X, A) \to (Y, B)$ индуцирует гомоморфизм $\Omega^n_{\mathrm{SO}}(X, A) \to \Omega^n_{\mathrm{SO}}(Y, B)$.

Упражнение 6.41. Докажите, что $\Omega^n_{\mathrm{SO}}(X, A)$ совпадает с обобщенной теорией гомологий, задаваемой спектром $M\,\mathrm{SO}(k)$.

7 Класс Тома и класс Эйлера

Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное ориентируемое вещественное расслоение. Ориентацией слоя $F_x = \eta^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$ называется образующая α_x группы $H^n(F_x, F_x \backslash \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (после всего, что происходило до этого, такой формализм не должен никого удивлять). Ориентации слоев в близких точках x, y (т.е. в точках, лежащих в одной тривиализующей окрестности U_α) называются согласованными, если они переходят друг в друга при изоморфизмах $H^n(F_x, F_x \backslash \{0\}; \mathbb{Z}) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \mathbb{Z}) \cong H^n(F_y, F_y \backslash \{0\}; \mathbb{Z})$, индуцированных тривиализациями $\phi_{\alpha,x}$, $\phi_{\alpha,y}$. Эквивалентным определением ориентируемости расслоения η является такое: η ориентируемо в том и только том случае, когда на слоях η можно выбрать ориентации, согласованные во всех точках.

Приведем чрезвычайно важную в алгебраической топологии теорему. Ее можно понимать как естественное обобщение Предложения 2.10 (теоремы о существовании фундаментального класса у ориентируемого многообразия).

Теорема 7.1 (Теорема Тома). *Пусть $\eta\colon E \to B$ — n-мерное ориентируемое вещественное расслоение над CW-комплексом B и выбраны согласованные ориентации всех слоев. Пусть B вложено в E в качестве нулевого сечения. Тогда существует единственный класс $u \in H^n(E, E \backslash B; \mathbb{Z})$, ограничение которого на любой слой $(F_x, F_x \backslash \{0\})$ дает выбранную ориентацию этого слоя. Кроме того, отображение $H^k(B; \mathbb{Z}) \cong H^k(E; \mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E, E \backslash B; \mathbb{Z})$, индуцированное $\smile$-произведением с u является изоморфизмом.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательствам Предложения 2.10 и Теорем 2.16, 4.43. Аргумент Майера–Вьеториса позволяет свести утверждение к достаточно малому подмножеству $B' \subset B$. Но малое подмножество B' обязано попасть в тривиализующее множество, а на нем теорема выполнена по построению (а последняя часть следует из формулы Кюннета). $\square$

Построенный класс $\mathrm{th}(\eta) \overset{\mathrm{def}}{=} u \in H^n(E, E \backslash B; \mathbb{Z})$ называется классом Тома, а изоморфизм $H^*(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile \mathrm{th}(\eta)} H^{k+n}(E, E \backslash B; \mathbb{Z})$ — изоморфизмом Тома.

Замечание 7.2. Имеется еще одна распространенная формулировка этой теоремы:

$$\widetilde{H}^{k+n}(M\eta) \cong H^k(B).$$

Докажем это. Пусть $D\eta \supset S\eta$ — пространства единичных шаров и единичных сфер в расслоении η. Тогда $M\eta \cong D\eta/S\eta$ и мы имеем $H^{k+n}(E, E\backslash B; \mathbb{Z}) \cong H^{k+n}(D\eta, D\eta\backslash B; \mathbb{Z}) \cong H^{k+n}(D\eta, S\eta; \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}^{k+n}(M\eta; \mathbb{Z})$, где первый изоморфизм — свойство вырезания, второй изоморфизм следует из ретракции $D\eta\backslash B \to S\eta$, а третий — стандартное свойство гомологий.

Определение 7.3. Образ класса Тома $\mathrm{th}(\eta)$ при гомоморфизме $H^n(E, E\backslash B; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z}) \overset{\cong}{\to} H^n(B; \mathbb{Z})$ называется классом Эйлера ориентированного n-мерного векторного расслоения η. Он обозначается $e(\eta)$.

Пусть $f\colon B' \to B$ непрерывное отображение и $f^*\eta\colon f^*E \to B'$ — индуцированное ориентированное векторное расслоение над B'. Когомологические классы $f^*(\mathrm{th}(\eta))$ и $\mathrm{th}(f^*(\eta))$ совпадают, поскольку они оба отображаются в одну и ту же ориентацию для каждого слоя (тут мы пользуемся единственностью класса Тома). Следовательно, $f^*(e(\eta)) = e(f^*(\eta))$. Мы доказали

Теорема 7.4. *Класс Эйлера является характеристическим классом ориентированных n-мерных вещественных векторных расслоений, принимающим значение в $H^n(B; \mathbb{Z})$. При изменении ориентации расслоения η класс $e(\eta)$ меняет знак.*

Упражнение 7.5. Если η нечетномерно, то $2e(\eta) = 0$.

Упражнение 7.6. $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = e(\eta_1) \smile e(\eta_2)$.

Упражнение 7.7. Пусть $2e(\eta) \neq 0$. Тогда η не может быть представлено в виде прямой суммы двух векторных расслоений, одно из которых нечетномерно.

Имя Эйлера в названии термина объясняется следующей теоремой

Теорема 7.8. *Пусть M — гладкое замкнутое ориентированное многообразие. Тогда $\int_M e(TM) = \langle e(TM), [M]\rangle = \chi(M)$ — эйлерова характеристика.*

Доказательство. Пусть M — гладкое подмногообразие в N, а E — тотальное пространство его нормального расслоения. Используя теорему о трубчатой окрестности 6.29 и свойство вырезания, имеем $H^*(E, E\backslash M; R) \cong H^*(N, N\backslash M; R)$.

Предложение 7.9. *Пусть $M^m \subset N^{m+k}$ — ориентируемое гладкое замкнутое подмногообразие, $u \in H^k(E, E\backslash M; \mathbb{Z}) \cong H^k(N, N\backslash M; \mathbb{Z})$ — класс Тома его нормального расслоения, а $p^*\colon H^*(N, N\backslash M; \mathbb{Z}) \to H^*(N; \mathbb{Z})$ отображение когомологий, индуцированное вложением пар $p\colon (N, \varnothing) \to (N, N\backslash M)$. Тогда класс $p^*(u) \in H^k(N; \mathbb{Z})$ является двойственным по Пуанкаре к классу $[M] \in H_m(N; \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Точно так же, как определялось $\frown$-произведение, определяется его относительная версия

$$H_{m+k}(X, A \cup B) \otimes H^k(X, A) \to H_m(X, B), \tag{7.1}$$

которая функториальна (в смысле формул типа (2.1)) относительно всевозможных отображений. Если положить в (7.1) $X = \mathbb{R}^{m+k}$, $A = \mathbb{R}^{m+k} \backslash \mathbb{R}^m$, $B = \mathbb{R}^{m+k} \backslash \mathbb{R}^k$ (мы полагаем, что $\mathbb{R}^{m+k}$ представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^k$) и, как следствие $A \cup B = \mathbb{R}^{m+k} \backslash \{0\}$, то формула (7.1) превращается в естественный изоморфизм $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$.

Для доказательства утверждения необходимо проверить, что $[N] \frown p^*(u) = [M]$, или, что эквивалентно, $p_*([N]) \frown u = [M]$ (эту формулу нужно понимать в смысле отображения $H_{m+k}(N, N \backslash M) \otimes H^k(N, N \backslash M) \xrightarrow{\frown} H_m(N)$). Пусть $x \in M \subset N$ — произвольная точка, $T_x M \cong \mathbb{R}^{m+k}$ — касательное пространство к M, $T_x N \cong \mathbb{R}^m$ — касательное пространство к N, $\nu_x \cong \mathbb{R}^k$ — нормальное пространство к M в N.

Класс $p_*([N]) \in H_{m+k}(N, N \backslash M)$ — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию M при отображении в $H_{m+k}(N, N \backslash x) \cong H_{m+k}(T_x N, T_x N \backslash \{0\})$ для любой точки x. Класс Тома u — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию нормального расслоения при ограничении на $H^k(\nu_x, \nu_x \backslash \{0\}) \cong H^k(T_x N, T_x N \backslash T_x M)$. Класс $[M] \in H_m(N)$ — это единственный класс, который отображается в локальную ориентацию касательного расслоения к M при отображении в $H^k(M, M \backslash x) \cong H^k(T_x M, T_x M \backslash \{0\}) \cong H^k(T_x N, T_x N \backslash \nu_x)$. Из всех этих единственностей и написанного в первом абзаце доказательства следует утверждение. □

Следствие 7.10. *В обозначениях предыдущего утверждения имеем $e(\nu_{M \subset N}) \in H^k(M; \mathbb{Z})$ совпадает с ограничением на M класса из $H^k(N; \mathbb{Z})$, Пуанкаре двойственного к $[M] \in H_m(N; \mathbb{Z})$.*

Упражнение 7.11. Пусть $\Delta\colon M \to M \times M$ — диагональное вложение. Нормальное расслоение к диагонали $\Delta(M)$ в $M \times M$ эквивалентно касательному расслоению к M.

Следствие 7.12. *Пусть $\omega \in H^m(M \times M)$ — класс, Пуанкаре двойственный к диагонали $[\Delta(M)] \in H_m(M \times M)$. Тогда $\int_M e(TM) = \int_{M \times M} \omega \smile \omega$.*

Следствие 7.13. *Пусть $A \subset M \times M$ — пошевеленная диагональ, то есть гладкое подмногообразие, представляющее класс $[\Delta(M)]$ и трансверсальное к $\Delta(M)$. Тогда число $\int_M e(TM)$ совпадает с суммой знаков точек пересечения A и $\Delta(M)$ в $M \times M$.*

Пусть $s\colon M \to TM$ — гладкое векторное поле на M (то есть гладкое сечение касательного расслоения). Допустим, что s трансверсально к нулевому сечению. Точка $x \in M$ называется особой точкой векторного поля s, если $s(x) = 0$. Иными словами, особые точки — это точки пересечения s с нулевым сечением. Знаком особой точки называется знак пересечения s с нулевым сечением в этой точке. Знак можно явно вычислить: локально сечение s является отображением из $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$, и знак сечения есть знак якобиана этого отображения в точке x.

Поскольку шевелить диагональ $\Delta(M) \subset M \times M$ достаточно лишь в трубчатой окрестности этой диагонали, а трубчатая окрестность диффеоморфна тотальному пространству нормального (а значит и касательного расслоения), из предыдущего следствия получаем.

Следствие 7.14. *Число* $\int_M e(TM)$ *равно сумме знаков векторного поля на* M*, трансверсального к нулевому сечению.*

Пусть K — триангуляция гладкого многообразия M. Построим специальное векторное поле на симплексах триангуляции K как показано на рис.2

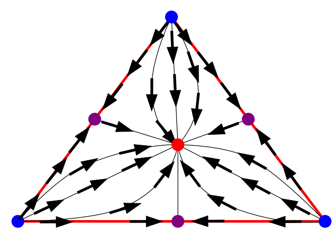

Рис. 2: Векторное поле на симплексе триангуляции

Видно, что особые точки этого векторного поля соответствуют симплексам, причем каждый j-мерный симплекс дает особую точку знака $(-1)^j$. Следовательно, сумма знаков особых точек равна эйлеровой характеристике.[12] □

Упражнение 7.15. Построения и утверждения этого параграфа можно провести в случае, когда M не ориентируемо, а кольцо коэффициентов — $\mathbb{Z}_2$. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$-аналог класса Эйлера совпадает с $w_m(M)$ — старшим классом Штифеля–Уитни.

Упражнение 7.16. Пусть η — комплексное расслоение размерности n, и $\eta_\mathbb{R}$ — его овеществление. Тогда $c_n(\eta) = e(\eta_\mathbb{R})$. (Указание: рассмотреть классифицирующие расслоения над $BU(n)$, BT^n, BT^1).

Упражнение 7.17. Точная последовательность Гизина. Пусть $\xi\colon E \to B$ — ориентируемое n-мерное векторное расслоение. Докажите существование точной последовательности

$$\cdots \to H^i(B) \overset{\smile e(B)}{\to} H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E\backslash B) \to H^{i+1}(B) \to \cdots,$$

используя точную последовательность когомологий пары $(E, E\backslash B)$.

Упражнение 7.18. При каких n на сфере S^n существует нигде не нулевое векторное поле?

[12] Альтернативное и более строгое алгебраическое доказательство последнего шага, не использующее векторные поля см. в [8]

Упражнение 7.19. Пусть η — ориентированное n-мерное вещественное расслоение. Тогда $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \eta \oplus \eta$ при изоморфизме, который либо сохраняет, либо меняет ориентацию в зависимости от четности числа $n(n-1)/2$.

Для всякого $2k$-мерного ориентированного вещественного расслоения η выполнено $p_k(\eta) = e(\eta)^2$.

Оказывается, что классами Понтрягина и классом Эйлера исчерпываются все хар.классы ориентируемых вещественных расслоений, если не учитывать 2-кручение.

Вспомним, что $\widetilde{G}_{\infty,n}$ — бесконечномерный грассманиан ориентированных n-плоскостей, — является базой универсального $SO(n)$-расслоения. Описание хар.классов ориентированных расслоений (с коэффициентами в R) эквивалентно описанию когомологий пространства $\widetilde{G}_{\infty,n} = BSO(n)$ (с коэффициентами в R).

Пусть $\tilde{\gamma}_m$ — каноническое расслоение над грассманианом ориентированных плоскостей, т.е. универсальное ориентированное расслоение. Пусть $R_{1/2}$ — область целостности, содержащая $\frac{1}{2}$ (например, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ или любое поле характеристики, не равной 2).

Теорема 7.20. *Кольцо $H^*(B\,\mathrm{SO}(2k+1); R_{1/2})$ является кольцом многочленов, порожденным классами Понтрягина $p_1(\tilde{\gamma}_{2k+1}), \ldots, p_k(\tilde{\gamma}_{2k+1})$. Кольцо $H^*(B\,\mathrm{SO}(2k); R)$ порождено классами Понтрягина $p_1(\tilde{\gamma}_{2k}), \ldots, p_k(\tilde{\gamma}_{2k})$, классом Эйлера $e(\tilde{\gamma}_{2k})$ и имеет единственное соотношение $p_k(\tilde{\gamma}_{2k}) = e(\tilde{\gamma}_{2k})^2$.*

Доказательство см.[8].

7.1 Ранги групп бордизмов

Мы можем завершить доказательства теорем Тома о рангах групп бордизмов.

Предложение 7.21. $\mathrm{rk}\,\Omega^{4n}_{\mathrm{SO}} = \mathrm{rk}\,\Omega^{2n}_{U} = |\mathcal{P}(n)|$. *При n не кратных 4 группа Ω^n_{SO} конечна. При нечетных n Ω^n_U конечна.*

Доказательство. Из конструкции Понтрягина–Тома следует изоморфизм $\Omega^{4n}_{\mathrm{SO}} \cong \pi_{4n+k}(M\,\mathrm{SO}(k))$ при $k > 4n+1$. Согласно упражнению 6.37 $\mathrm{rk}\,\pi_{4n+k}(M\,\mathrm{SO}(k)) = \mathrm{rk}\,H^{4n+k}(M\,\mathrm{SO}(k))$. Изоморфизм Тома дает $H^{4n+k}(M\,\mathrm{SO}(k)) \cong H^{4n}(B\,\mathrm{SO}(k))$ (см. замечание 7.2). Согласно теореме 7.20 ранг последней группы равен числу мономов от $p_1(\tilde{\gamma}_k), \ldots, p_k(\tilde{\gamma}_k)$ степени $4n$ (класс Эйлера имеет градуировку $k > 4n+1$ и на ранг интересующей нас группы никак не влияет). Число таких мономов равно $|\mathcal{P}(n)|$.

Аналогично доказывается, что $\mathrm{rk}(\Omega^{2n}_U) = |\mathcal{P}(n)|$ — в этом случае все сводится к когомологиям $BU(n)$, которые описываются Теоремой 4.42 (и ее мы даже доказали, в отличие от Теоремы 7.20).

Оставшаяся часть утверждения (про конечность групп) выводится абослютно аналогично. □

7.2 Структура колец кобордизмов

Собирая воедино утверждения 7.21 и а также Леммы 6.22, 6.24 и их доказательства, мы получаем

Теорема 7.22. *Имеют место кольцевые гомоморфизмы*

$$\Omega_U^* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^3], \ldots]$$

$$\Omega_{\mathrm{SO}}^* \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^2], [\mathbb{C}P^4], [\mathbb{C}P^6], \ldots]$$

где, в первом случае $[\mathbb{C}P^k]$ — класс U-бордизма многообразия $\mathbb{C}P^k$ со стандартной комплексной структурой, а во втором случае $[\mathbb{C}P^{2k}]$ — класс его SO*-бордизма.*

На самом деле, имеются более тонкие результаты, которые мы приведем без доказательств

Теорема 7.23.

1. *(Том) $\Omega_{\mathrm{SO}}^{4n} \cong \mathbb{Z}^{|\mathcal{P}(n)|}$. Набор чисел Понтрягина является полным инвариантом отношения* SO*-бордантности для $4n$-мерных многообразий.*
2. *(Уолл) При n не кратном 4 Ω_{SO}^n содержит лишь $\mathbb{Z}_2$-кручение.*
3. *(Уолл) Многообразие M является границей ориентированного многообразия с границей в том и только том случае, когда все его числа Понтрягина и Штифеля–Уитни равны нулю.*

Теорема 7.24 (Новиков)**.** $\Omega_U^* \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$, $\deg a_k = 2k$. *В частности в группах комплексных кобордизмов нет кручения.*

Замечание 7.25. Заметим, что в качестве целочисленных образующих кольца комплексных кобордизмов многообразия $\mathbb{C}P^k$ **НЕ подходят**. Они становятся образующими только над рациональными числами.

Теорема 7.26 (Милнор–Новиков)**.** *Стабильно комплексное многообразие M^{2n} можно взять в качестве образующей a_n кольца комплексных кобордизмов в том и только том случае, когда*

$$s_n(M) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } n \neq p^k - 1 \text{ ни для какого простого } p; \\ \pm p, & \text{если } n = p^k - 1 \text{ для некоторого простого } p; \end{cases}$$

Теорема 7.27 (Том)**.** $\Omega_O^* \cong \mathbb{Z}_2[a_2, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, \ldots]$, $\deg a_k = k$, $k \neq 2^s - 1$.

8 Роды Хирцебруха

Числа Понтрягина являются аддитивными инвариантами бордизма, но они не обладают мультипликативностью. Хочется это исправить. Пусть R — произвольное кольцо (допустим, в R есть элемент $\frac{1}{2}$ — это позволит игнорировать 2-кручение в группах SO-бордизмов, и позволит считать полный класс Понтрягина мультипликативным относительно суммы Уитни расслоений).

Определение 8.1. Родом Хирцебруха называется мультипликативный гомоморфизм колец $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \to R$.

Иными словами, род Хирцебруха — это мультипликативный аддитивный инвариант бордизма гладких многообразий, принимающий значение в кольце R. Имеется несложный алгоритм построения таких инвариантов, на вход которого надо подать формальный степенной ряд.

Конструкция 8.2. Пусть $Q(t) \in R[[t]]$ — формальный степенной ряд. Пусть M — гладкое многообразие размерности $n = 4k$, а $t_1, \ldots, t_k$ — корни Понтрягина его касательного расслоения (то есть такие формальные символы, что $\sigma_i(t_1, \ldots, t_k) = p_i(TM)$). Определим число

$$\chi_Q(M) = \int_M Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in R.$$

Поясним, что всё это значит. Ряд $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k)$ является симметрическим формальным рядом от переменных $t_1, \ldots, t_k$, а значит выражается единственным образом через элементарные симметрические многочлены:

$$Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in R[[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]].$$

Заменяя каждый элементарный симметрический многочлен на соответствующий класс Понтрягина, получаем $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k) \in H^*(M; R)$ (бесконечный ряд на самом деле обрывается, поскольку в размерностях, больших $4k$, никаких когомологий нет). Пусть $K_k(p_1, \ldots, p_k)$ — компонента элемента $Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k)$, лежащая в группе когомологий старшей размерности $H^{4k}(M; R)$. Результат спаривания $K_k(p_1, \ldots, p_k)$ с фундаментальным классом мы и обозначаем $\chi_Q(M)$.

Таким образом, мы получили функцию χ_Q, которая каждому многообразию M сопоставляет число $\chi_Q(M) \in R$.

Предложение 8.3. *χ_Q является родом Хирцебруха.*

Доказательство. По построению $\chi_Q(M)$ является линейной комбинацией чисел Понтрягина, а значит это аддитивный инвариант бордизма. Надо только доказать мультипликативность: $\chi_Q(M \times N) = \chi_Q(M)\chi_Q(N)$. В Предложении 5.3 мы фактически доказали, что если $t_1, \ldots, t_m$ — корни Черна расслоения ξ, $t'_1, \ldots, t'_n$ — корни Черна расслоения η, то набор формальных символов $t_1, \ldots, t_m, t'_1, \ldots, t'_n$ можно рассматривать как корни Черна расслоения $\xi \oplus \eta$ (см.замечание 5.4). Абсолютно аналогично проверяется, что если $t_1, \ldots, t_m$ — корни Понтрягина расслоения TM, $t'_1, \ldots, t'_n$ — корни

Понтрягина расслоения TN, то объединенный набор $t_1, \dots, t_m, t'_1, \dots, t'_n$ можно рассматривать как корни Понтрягина расслоения $T(M \times N)$. Имеем

$$\begin{aligned}\chi_Q(M \times N) &= \int_{M\times N} Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_m) Q(t'_1) \cdot \ldots \cdot Q(t'_n) = \\ &= \left(\int_M Q(t_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_m) \right) \left(\int_N Q(t'_1) \cdot \ldots \cdot Q(t'_n) \right) = \chi_Q(M)\chi_Q(N). \qquad (8.1)\end{aligned}$$

□

Предложение 8.4 (Следствие теоремы Тома о структуре кольца кобордизмов)**.** *Любой род Хирцебруха $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \to \mathbb{Q}$ задается некоторым рядом.*

Упражнение 8.5. Доказать это утверждение.

Упражнение 8.6. Является ли эйлерова характеристика родом Хирцебруха? Если да, то какой ряд ее задает?

8.1 Сигнатура

Алгебраическое отступление Пусть S — симметричная билинейная (=квадратичная) форма на вещественном векторном пространстве V, т.е. $S\colon V \otimes V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \overset{\text{def}}{=} S(v,w)$, $(v,w) = (w,v)$. Любая такая форма диагонализуется, т.е. в некотором базисе записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_n \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$$

причем количество $+1$, -1 и 0 на диагонали не зависит от диагонализации. Число "$+1$" плюс число "-1" называется рангом формы и обозначается $\operatorname{rk} S$, а число "$+1$" минус число "-1" называется сигнатурой формы, и обозначается $\sigma(S)$. У нас все формы будут невырожденными, т.е. $\operatorname{rk} S = n = \dim V$.

Имеется пара технических, но довольно естественных определений.

Определение 8.7. Пусть S_1 — симметрическая билинейная форма на V_1, а S_2 — симметрическая билинейная форма на V_2. Зададим форму $S_1 \oplus S_2$ на $V_1 \oplus V_2$ по линейности, используя правило:

$$S_1 \oplus S_2(v,w) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} S_1(v,w), \text{ если } v, w \in V_1; \\ S_2(v,w), \text{ если } v, w \in V_2; \\ 0, \text{ если } v, w \text{ из разных пространств.} \end{cases}$$

Зададим форму $S_1 \otimes S_2$ на $V_1 \otimes V_2$:

$$S_1 \otimes S_2(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) \overset{\text{def}}{=} S_1(v_1, w_1) S_2(v_2, w_2).$$

Упражнение 8.8. Доказать, что $\sigma(S_1 \oplus S_2) = \sigma(S_1) + \sigma(S_2)$. Доказать, что $\sigma(S_1 \otimes S_2) = \sigma(S_1)\sigma(S_2)$.

Напомним, что подпространство $W \subset V$ называется изотропным относительно формы S на V, если $S|_W = 0$. Два подпространства $W_1, W_2 \subset V$ называются ортогональными, $W_1 \perp W_2$, если $S(w_1, w_2) = 0$, $\forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Если $W_1 \perp W_2$ и $V = W_1 \oplus W_2$, то $\sigma(V) = \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$, см. упражнение.

Лемма 8.9. *Если невырожденная билинейная форма на V обладает изотропным подпространством W половинной размерности,* $\dim W = \frac{1}{2}\dim V$*, то* $\sigma(S) = 0$.

Доказательство. Пусть V_+ и V_- — подпространства V, на которых форма S положительно и отрицательно определена соответственно. Имеем $V = V_+ \oplus V_-$ (т.к. форма невырожденна). Поскольку $V_+ \cap W = 0$ и $V_- \cap W = 0$, имеем $\dim V_+ \leqslant \dim V/2$ и $\dim V_- \leqslant \dim V/2$. Т.к. в сумме $\dim V_+$ и $\dim V_-$ дают $\dim V$, получаем точное равенство $\dim V_+ = \dim V_- = \dim V/2$, а значит $\sigma(S) = \dim V_+ - \dim V_- = 0$. □

L-род: сигнатура Существует естественный род Хирцебруха, имеющий геометрическую природу. Пусть M^{4k} — ориентируемое связное многообразие. Билинейная форма $H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, $\omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \int_M(\omega_1 \smile \omega_2)$ невырождена (двойственность Пуанкаре) и симметрична (элементы четной степени коммутируют). Сигнатура этой формы называется сигнатурой многообразия M и обозначается $\sigma(M)$. Если M несвязно, положим $\sigma(M) = \sum \sigma(M_i)$, сумма по всем связным компонентам M. Если размерность M не делится на 4, положим $\sigma(M) = 0$.

Предложение 8.10. *Сигнатура является родом Хирцебруха.*

Доказательство. Надо проверить, что σ — аддитивный мультипликативный инвариант бордизма.

Аддитивность. Форма спаривания на $M_1 \sqcup M_2$, очевидно, равна прямой сумме форм спаривания на M_1 и M_2, поэтому аддитивность следует из пункта 1 упр.8.8.

Зависимость от ориентации. Изменение знака сигнатуры при изменении ориентации также очевидно, поскольку фундаментальный класс меняет знак.

Мультипликативность. Покажем, что $\sigma(M_1 \times M_2) = \sigma(M_1)\sigma(M_2)$. Сосредоточимся на случае, когда $\dim M_1 = 4m_1$, $\dim M_2 = 4m_2$ (случаи, когда размерности сомножителей не делятся на 4, а размерность произведения — делится, разбирается похожим образом). По формуле Кюннета имеем (все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$):

$$H^{2(m_1+m_2)}(M_1 \times M_2) \cong \Pi_0 \oplus \Pi_> \oplus \Pi_<,$$

где

$$\Pi_0 = H^{2m_1}(M_1) \otimes H^{2m_2}(M_2),$$
$$\Pi_> = \bigoplus_{i \geqslant 1} H^{2m_1+i}(M_1) \otimes H^{2m_2-i}(M_2),$$
$$\Pi_< = \bigoplus_{i \geqslant 1} H^{2m_1-i}(M_1) \otimes H^{2m_2+i}(M_2).$$

Заметим, что относительно формы спаривания $\Pi_0 \perp (\Pi_> \oplus \Pi_<)$. Действительно, когомологическое произведение класса из Π_0 и класса из $\Pi_>$ дает градуировку первого сомножителя, большую чем $4m_1 = \dim M_1$, и аналогично с произведениями Π_0 и $\Pi_<$. По тем же причинам, каждое из подпространств $\Pi_>$ и $\Pi_<$ является изотропным. Заметим, что $\Pi_> \cong \Pi_<$, согласно двойственности Пуанкаре, т.е. каждое из них является изотропным подпространством половинной размерности в $\Pi_> \oplus \Pi_<$. Значит, $\Pi_> \oplus \Pi_<$ дает нулевой вклад в сигнатуру. В итоге имеем:

$$\sigma(M_1 \times M_2) = \sigma(\Pi_0) + \sigma(\Pi_> \oplus \Pi_<) = \sigma(H^{2m_1}(M_1) \otimes H^{2m_2}(M_2)) + 0 = \sigma(M_1)\sigma(M_2),$$

где последнее выполнено согласно пункту 2 упр. 8.8.

Инвариантность относительно бордизма. Докажем, что сигнатура многообразия равна нулю, если многообразие — чья-то граница. Пусть $M^m = \partial B^{m+1}$ и B (а следовательно и M) — ориентируемо, и пусть B связно. Пусть $[B] \in H_{m+1}(B, M)$ и $[M] \in H_m(M)$ — фундаментальные классы (все коэффициенты предполагаются в $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$). Нам потребуется небольшое усиление двойственности Пуанкаре–Лефшеца, а именно следующий факт: с точностью до знаков имеет место изоморфизм точных последовательностей

$$\begin{tikzcd}
H^k(B) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] & H^k(M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cong"', "{[M]\frown}"] & H^{k+1}(B, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] & H^{k+1}(B) \arrow[d, "\cong"', "{[B]\frown}"] \\
H_{m+1-k}(B, M) \arrow[r, "\delta_*"] & H_{m-k}(M) \arrow[r, "i_*"] & H_{m-k}(B) \arrow[r] & H_{m-k}(B, M)
\end{tikzcd}$$

где сверху стоит точная последовательность когомологий пары (B, M), а снизу — точная последовательность гомологий этой же пары [1, Th.9.2].

Лемма 8.11. *Пусть связное многообразие M — граница $(2n+1)$-мерного ориентируемого многообразия B. Тогда* $\dim H^n(M^{2n})$ *четно и*

$$\dim \operatorname{Ker}(i_*\colon H_n(M) \to H_n(B)) = \dim \operatorname{Im}(i^*\colon H^n(B) \to H^n(M)) = \frac{1}{2} \dim H^n(M^{2n}).$$

Более того, когомологическое умножение на подпространстве $\operatorname{Im}(i^*) \subset H^n(M^{2n})$ *тривиально.*

Доказательство. Из диаграммы Пуанкаре–Лефшеца имеем $[M] \frown \operatorname{Im}(i^*) = \operatorname{Ker}(i_*)$. Значит, $\operatorname{rk}(i^*) = \dim \operatorname{Im}(i^*) = \dim H^n(M) - \operatorname{rk}(i_*) = H^n(M) - \operatorname{rk}(i^*)$, откуда следует, что $\dim H_n(M) = 2\operatorname{rk}(i^*)$ (отображения i_* и i^* двойственны друг к другу, значит имеют одинаковый ранг). Значит, $\dim H_n(M) = 2\dim \operatorname{Im}(i^*) = 2\dim \operatorname{Ker}(i_*)$.

Пусть $\alpha, \beta \in H^n(B)$. Тогда $\delta^*(i^*(\alpha) \smile i^*(\beta)) = (\delta^* i^*)(\alpha \smile \beta) = 0$, поскольку $\delta^* i^* = 0$. С другой стороны, $\delta^*\colon H^{2n}(M) \to H^{2n+1}(B, M)$ является мономорфизмом, поскольку он совпадает с $i_*\colon H_0(M) \to H_0(B)$ с точностью до изоморфизма. Значит, $\alpha \smile \beta = 0$. $\square$

Теперь легко доказать, что если $4k$-мерное связное многообразие M является границей многообразия B, то его сигнатура нулевая. Действительно, сигнатура является симметричной невырожденной билинейной формой на $H^{2k}(M)$. Пусть $\dim H^{2k}(M) = d$. Из Леммы следует, что у формы спаривания есть изотропное подпространство $\mathrm{Im}(i^*\colon H^{2k}(B) \to H^{2k}(M))$ размерности $\frac{d}{2}$. Значит сигнатура равна 0.

Упражнение 8.12. Используя идеи, предложенные в доказательстве выше, докажите следующее утверждение. Если M^{4k} — граница ориентируемого многообразия B (возможно, несвязная), то сумма сигнатур ее компонент связности равна 0. Надо немного подкрутить самый конец доказательства.

Из упражнения и определения бордизма следует, что сигнатура является инвариантом бордизма. □

8.2 Теорема Хирцебруха

Предложение 8.4 гласит, что сигнатура должна задаваться некоторым рядом. Этот ряд был вычислен Хирцебрухом.

Теорема 8.13 (Теорема Хирцебруха о сигнатуре)**.** *Сигнатура задается рядом*

$$L(t) = \frac{\sqrt{t}}{\tanh(\sqrt{t})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j} B_{2j}}{(2j)!} t^j,$$

где $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *— гиперболический тангенс, а* B_{2k} *— числа Бернулли.*

Замечание 8.14. Нам потребуется следующий стандартный факт из комплексного анализа. Пусть задан ряд Лорана

$$f(z) = a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + \cdots + a_{-1}z^{-1} + \cdots$$

Тогда коэффициент a_{-1} (вычет комплексной функции $f(z)$) можно вычислить с помощью контурного интеграла

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint f(z)dz$$

где интеграл берется по любому малому контуру, обходящему 0 один раз в положительном направлении. Умножая $f(z)$ на z^k, можно свести вычисление любого коэффициента ряда Лорана к контурному интегралу, что активно используется в комбинаторике.

Доказательство. Пусть χ_L — род Хирцебруха, задавемый рядом $\dfrac{\sqrt{t}}{\tanh(\sqrt{t})}$. И сигнатура и χ_L являются родами Хирцебруха, значит достаточно проверить, что их значения совпадают на образующих кольца $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$. По теореме Тома, в качестве образующих можно взять $\mathbb{C}P^{2n}$, $n \geqslant 1$. Легко проверить, что сигнатура любого $\mathbb{C}P^{2n}$ равна 1.

Пусть $a \in H^2(\mathbb{C}P^{2n};\mathbb{Q})$ — образующая кольца когомологий. Из упражнений 5.19 и 5.40 выводится, что полный класс Понтрягина касательного расслоения $T\mathbb{C}P^{2n}$ равен $(1+a^2)^{2n+1}$. Для подсчета значения $\chi_L(\mathbb{C}P^{2n})$, нужно проинтегрировать $\prod_i L(t_i)$ по $\mathbb{C}P^{2n}$, где t_i — корни Понтрягина, то есть такой набор формальных символов, что $\sigma_j(t_i) = p_j(\mathbb{C}P^{2n})$, или, эквивалентно, $\prod_i(1+t_i) = p(\mathbb{C}P^{2n})$. В качестве такого набора можно взять вполне конкретные (не формальные!) элементы $t_i = a^2 \in H^4(\mathbb{C}P^{2n})$, $i = 1,\ldots,2n+1$, поскольку они свойству $\prod_i(1+t_i) = p(\mathbb{C}P^{2n})$ как раз удовлетворяют, хотя их и больше, чем нужно. Значит,

$$\prod_{i=1}^{2n+1} L(t_i) = \left(\frac{\sqrt{a^2}}{\tanh\sqrt{a^2}}\right)^{2n+1} = \left(\frac{a}{\tanh a}\right)^{2n+1}.$$

Проинтегрировать этот элемент по $\mathbb{C}P^{2n}$ означает найти коэффициент формального ряда $\left(\frac{a}{\tanh a}\right)^{2n+1}$ при члене a^{2n}. Это уже задача по анализу.

Коэффициент C при z^{2n} комплексного ряда $\left(\frac{z}{\tanh z}\right)^{2n+1}$ можно посчитать как

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint \frac{1}{z^{2n+1}}\left(\frac{z}{\tanh z}\right)^{2n+1} dz = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint \frac{dz}{(\tanh z)^{2n+1}}.$$

Делая замену $u = \tanh(z)$, получаем,

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint \frac{(1+u^2+u^4+\ldots)du}{u^{2n+1}} = 1.$$

Значит $\chi_L(\mathbb{C}P^{2n}) = 1 = \sigma(\mathbb{C}P^{2n})$ и теорема доказана. $\square$

Замечание 8.15. Сигнатура также называется L-родом. Заметим, что значение L-рода на любом многообразии является целым числом, поскольку он совпадает с сигнатурой. Из задания L-рода при помощи ряда это отнюдь не очевидно.

Классы Понтрягина, а значит и числа Понтрягина, а значит и роды Хирцебруха, можно определить не только для гладких многообразий, но и для кусочно-линейных многообразий. Милнор построил 8-мерное кусочно-линейное многообразие, значение L-рода на котором не целое. А значит, это многообразие не является гладким (совпадение сигнатуры и L-рода имеет место для гладких многообразий).

Замечание 8.16. Для удобства приведем здесь начальный отрезок разложения L-функции в ряд Тейлора: $t/\tanh(t) = 1 + t^2/3 - t^4/45 + 2t^6/945 + \ldots$.

Замечание 8.17. Явные вычисления показывают, что на 4-мерных гладких многообразиях $\sigma(M) = \chi_L(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(M)$, а на 8-мерных $\sigma(M) = \chi_L(M) = \frac{1}{45}\int_M(7p_2(M) - p_1(M)^2)$. Как следствие, первое число Понтрягина 4-мерного многообразия должно быть кратно 3, а число $\langle 7p_2(M) - p_1(M)^2, [M]\rangle$ для 8-мерных многообразий — кратно 45.

Теорема 8.18 (Теорема Черна–Хирцебруха–Серра)**.** *Пусть* $p\colon X \xrightarrow{F} B$ *расслоение, база, слой и тотальное пространство которого — ориентированные гладкие замкнутые многообразия. Пусть* $\pi_1(B)$ *действует на* $H^*(F)$ *тривиально. Тогда* $\sigma(X) = \sigma(B)\sigma(F)$.

Доказательство. Идея: сигнатуру можно определить для произвольной алгебры с двойственностью Пуанкаре. Можно определить естественное понятие дифференциала на алгебре Пуанкаре. Последовательность действий такая: (1) Когомологии алгебры Пуанкаре относительно дифференциала — снова алгебра Пуанкаре. (2) Сигнатура алгебры Пуанкаре не меняется при переходе к когомологиям. (3) Рассматривается мультипликативная спектральная последовательность Серра расслоения p. (4) $E_2 \cong H^*(B) \otimes H^*(F)$ является алгеброй Пуанкаре сигнатуры $\sigma(B)\sigma(F)$, как мы уже видели раньше. (5) Дифференциал на каждом шаге представляет из себя дифференциал в алгебре Пуанкаре, поэтому сигнатура не меняется при путешествии по листам. (6) Надо проверить, что сигнатура фильтрованной алгебры $H^*(X)$ совпадает с сигнатурой присоединенной алгебры E_∞. См.[2]. □

Теорема 8.19 (Борель–Хирцебрух)**.** *Сигнатура — это единственный род Хирцебруха, который мультипликативен на расслоениях с односвязной базой и принимает значение* 1 *на* $\mathbb{C}P^2$.

Упражнение 8.20. Доказать эту теорему, используя тот факт, что в качестве мультипликативных образующих кольца $\Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$ можно вместо $\mathbb{C}P^{2n}$ взять $\mathbb{C}P^2$ и гиперповерхности Милнора $H_{i,j}$ определенного вида, и что каждая из гиперповерхностей Милнора является расслоением над $\mathbb{C}P^{j-1}$ со слоем $\mathbb{C}P^i$. См.[10].

8.3 Род Тодда

Используя вместо классов Понтрягина классы Черна, можно так же как и раньше задавать мультипликативные роды из кольца комплексных кобордизмов Ω_*^U в R.

Определение 8.21. Род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий, заданный рядом $Q_y(t) = \dfrac{t(1+ye^{-t(1+y)})}{1-e^{-t(1+y)}}$, называется χ_y-родом. Здесь y — параметр.

При $y = -1$ получаем $Q_{-1}(t) = t$, а значит $\chi_{-1}(M) = \int_M t_1 \cdots t_n = \int_M c_n(M)$ (если M — почти комплексное, то это число совпадает с эйлеровой характеристикой, поскольку $c_n(TM) = e(TM)$). При $y = 1$ получаем $Q_1(t) = \dfrac{t}{\tanh(t)}$, значит $\chi_1(M) = \sigma(M)$ — сигнатура (поскольку для стабильно комплексных многообразий "корни Черна — это квадратные корни из корней Понтрягина", см. упр.5.40). При $t = 0$ получаем $Q_0(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}$. Соответствующий род называется родом Тодда.

Можно понимать y как универсальный параметр, то есть считать, что χ_y — это род, принимающий значение в $R = \mathbb{Q}[y]$.

Теорема 8.22 (Хирцебрух)**.** *Пусть M^{2n} — компактное комплексное многообразие. Тогда $\chi_y(M) = \sum_p \chi^p(M)y^p$. Здесь $\chi^p(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h^{p,q}(M)$, где $h^{p,q}(M)$ — числа Ходжа (размерности когомологий Дольбо). В частности, род Тодда совпадает с арифметическим родом.*

Замечание 8.23. Если M — почти комплексное многообразие, то также верна формула $\chi_y(M) = \sum_p \chi^p(M)y^p$, где на этот раз $\chi^p(M)$ — индексы дифференциальных операторов специального вида, то есть целые числа. В частности, род Тодда любого почти комплексного многообразия — целое число.

Пример 8.24. Пусть M — почти комплексное многообразие вещественной размерности 4. Пусть $c_2 = \int_M c_2(M)$, $c_1^2 = \int_M c_1(M)^2$. Имеем $\chi(M) = c_2$, $\sigma(M) = \frac{c_1^2 - 2c_2}{3}$, $\mathrm{Td}(M) = \frac{c_1^2 + c_2}{12}$. Отсюда вытекает $\mathrm{Td}(M) = \frac{\chi(M) + \sigma(M)}{4}$.

Пример 8.25. Известно, что $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ — стабильно комплексное многообразие (см.[**?**, стр.126]). Несложный подсчет дает $\chi(M) = 4$, $\sigma(M) = 2$. Значит $\mathrm{Td}(M) = 3/2$ согласно выкладке из предыдущего примера. Следовательно на M не существует почти комплексной структуры, см. замечание 8.23.

Замечание 8.26. При этом, $\mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$ — это вполне себе комплексное многообразие, даже алгебраическое. В алгебраической геометрии оно получается как раздутие $\mathbb{C}P^2$ в точке и называется поверхностью Хирцебруха (пример торического многообразия).

9 Дополнение: спектральные последовательности

9.1 Гомологическое введение

Для пары пространств $Y \subseteq X$ имеется точная последовательность в гомологиях

$$\cdots \to H_j(Y) \to H_j(X) \to H_j(X, Y) \to H_{j-1}(Y) \to \cdots \tag{9.1}$$

Неформально говоря, этот объект позволяет по информации о гомологиях Y и относительных гомологиях X по Y получить какую-то информацию о гомологиях X.

Напомним, откуда берется точная последовательность в гомологиях. Каждому пространству X можно сопоставить дифференциальный комплекс сингулярных цепей $C_*(X) = \bigoplus_i C_i(X)$, $\partial\colon C_i(X) \to C_{i-1}(X)$, $\partial^2 = 0$. Каждой паре $Y \subseteq X$ сопоставляется короткая точная последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \to C_*(Y) \to C_*(X) \to C_*(X, Y) \to 0, \tag{9.2}$$

где по определению $C_*(X, Y) = C_*(X)/C_*(Y)$. По определению $H_*(X) = H_*(C_*(X), \partial)$.

Лемма о змее утверждает, что короткая точная последовательность дифференциальных комплексов $0 \to (A, \partial) \to (B, \partial) \to (C, \partial) \to 0$ порождает длинную точную последовательность их гомологий

$$\cdots \to H_{j+1}(C) \xrightarrow{\delta} H_j(A) \to H_j(B) \to H_j(C) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(A) \to \cdots$$

где δ : вспомогательные гомоморфизмы, называемые связывающими гомоморфизмами.

Применение леммы о змее к короткой последовательности (9.2) дает точную последовательность гомологий пары (9.1).

Заметим также, что для тройки вложенных дифференциальных комплексов $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ имеется короткая точная последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \to A_2/A_1 \to A_3/A_1 \to A_3/A_2 \to 0$$

которая по лемме о змее индуцирует длинную точную последовательность гомологий:

$$\cdots \to H_{j+1}(A_3, A_2) \xrightarrow{\delta} H_j(A_2, A_1) \to H_j(A_3, A_1) \to H_j(A_3, A_2) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(A_2, A_1) \to \cdots \tag{9.3}$$

Здесь и далее используется обозначение $H_*(A, B) = H_*(A/B)$.

Фильтрации Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда есть не одно подпространство Y в X а целая цепочка вложенных "матрешек":

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X.$$

Такие цепочки называются фильтрациями. Общий вопрос, на который мы хотим научиться отвечать, таков: как связаны между собой

$$H_*(X_0), H_*(X_1, X_0), \ldots, H_*(X_n, X_{n-1}) \text{ и } H_*(X)?$$

Переходя от пространств к дифференциальным комплексам сингулярных цепей мы получим чисто алгебраическую задачу. Пусть

$$(A_0, \partial) \subseteq (A_1, \partial) \subseteq (A_2, \partial) \subseteq \cdots \subseteq (A_n, \partial) = (A, \partial)$$

— фильтрация дифференциального комплекса (A, ∂) (см. определение ниже). Как связаны гомологии последовательных факторов $H_*(A_i, A_{i-1})$ и гомологии самого комплекса $H_*(A)$?

Выпишем все гомологии факторов в таблицу $E^1_{*,*}$ следующим образом (в каждом столбце происходит небольшой сдвиг): На позиции с координатами (p, q) стоит группа $E^1_{p,q} = H_{p+q}(A_p, A_{p-1})$. Эта группа по определению есть фактор

$$E^1_{p,q} = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-1}\}}{A_{p-1} + \partial A_p} \tag{9.4}$$

(здесь и далее предполагается, что в знаменателе стоит не вся указанная группа, а лишь ее пересечение с числителем). Заметим, что ∂ от числителя $E^1_{p,q}$ попадает в числитель $E^1_{p-1,q}$ а ∂ от знаменателя $E^1_{p,q}$ — в знаменатель $E^1_{p-1,q}$ (проверьте это!). Поэтому ∂ индуцирует корректный гомоморфизм $d_1 \colon E^1_{p,q} \to E^1_{p-1,q}$. Легко проверить, что построенный d_1 совпадает со связывающим гомоморфизмом

$$\delta \colon H_{p+q}(A_p, A_{p-1}) \to H_{p+q-1}(A_{p-1}, A_{p-2})$$

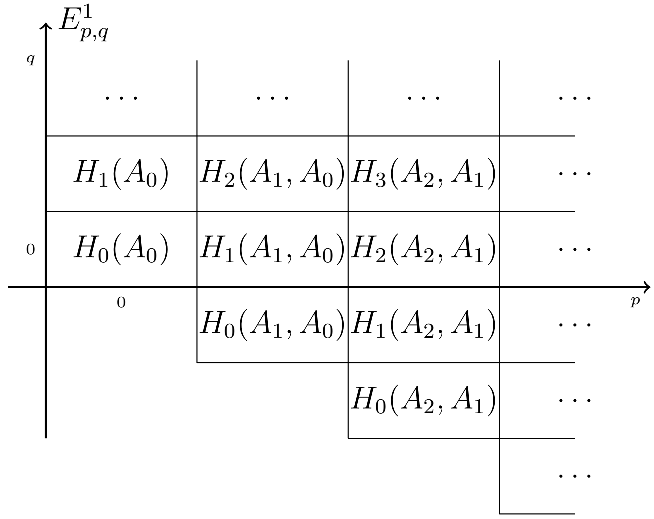

Рис. 3: Первый член спектральной последовательности

для тройки $A_{p-2} \subset A_{p-1} \subset A_p$ (см длинную точную последовательность (9.3)).

Поскольку $\partial^2 = 0$ и d_1 индуцирован из ∂, имеем $d_1^2 = 0$. Таким образом, имеющаяся у нас начальная информация о гомологиях последовательных факторов представляет из себя таблицу из групп $E^1_{p,q}$ и дифференциалов d_1 бистепени $(-1, 0)$.

Перейдем к гомологиям: рассмотрим таблицу, состоящую из групп $E^2_{p,q} = H_*(E^1_{p,q}, d_1)$. Используя описание (9.4) и явный вид дифференциала d_1, легко получить описание для $E^2_{p,q}$:

$$E^2_{p,q} = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-2}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+1}} \tag{9.5}$$

Заметим, что ∂ от числителя $E^2_{p,q}$ попадает в числитель $E^2_{p-2,q+1}$ а ∂ от знаменателя $E^2_{p,q}$ — в знаменатель $E^1_{p-2,q+1}$ (проверьте это!). Поэтому ∂ индуцирует корректный гомоморфизм, на этот раз "бьющий конем" $d_2\colon E^2_{p,q} \to E^2_{p-2,q+1}$. Этот гомоморфизм индуцирован из ∂, поэтому он также удовлетворяет $d_2^2 = 0$. В итоге мы получаем таблицу из групп $E^2_{p,q}$ и дифференциалов $d_2\colon E^2_{p,q} \to E^2_{p-2,q+1}$.

Перейдем к гомологиям опять: рассмотрим $E^3_{p,q} = H_*(E^2_{p,q}, d_2)$. Опять же имеем явное описание:

$$E^3_{p,q} = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-3}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+2}} \tag{9.6}$$

и видим, что ∂ индуцирует корректно определенный дифференциал $d_3\colon E^3_{p,q} \to E^3_{p-3,q+2}$.

Мы можем продолжать этот процесс перехода к гомологиям и построения новых и новых дифференциалов до бесконечности. Говоря не совсем формально, мы "в пределе" приходим к группе

$$E^\infty_{p,q} = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-\infty}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+\infty}} \tag{9.7}$$

Заметим однако, что наша фильтрация была ограничена, поэтому при всех $p < 0$ можно положить $A_p = 0$, а при всех $p \geqslant n$ $A_p = A$. Поэтому

$$E^\infty_{p,q} = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a = 0\}}{A_{p-1} + \partial A} \tag{9.8}$$

Видно, что эта группа совпадает с

$$\frac{\text{Образ } H_{p+q}(A_p) \text{ в } H_{p+q}(A)}{\text{Образ } H_{p+q}(A_{p-1}) \text{ в } H_{p+q}(A)}$$

Таким образом, мы получили последовательность биградуированных групп и дифференциалов $(E^1_{p,q}, d_1), (E^2_{p,q}, d_2), \ldots$, каждая из которых является гомологиями предыдущей, такую что $E^1_{p,q}$ содержит информацию о гомологиях факторов A_p/A_{p-1}, а в пределе получаются факторы гомологий (что есть уже некая информация о гомологиях A). В этом и состоит суть спектральных последовательностей.

Формализм Пусть R : основное кольцо ($\mathbb{Z}$ или поле). Напомним, что дифференциальный комплекс — это $\mathbb{Z}$-градуированный R-модуль $C_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$, снабженный гомоморфизмом $\partial\colon C_i \to C_{i-1}$, $\partial^2 = 0$, который называется дифференциалом. Гомологии комплекса — это модули

$$H_i(C) = H_i(C_*, \partial) = H_*(C_i, \partial) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial\colon C_i \to C_{i-1})}{\operatorname{Im}(\partial\colon C_{i+1} \to C_i)}$$

Определение 9.1. Фильтрация дифференциального комплекса (C_*, ∂) (соотв. векторных пространств, соотв. топологических пространств) — это последовательность вложенных дифференциальных подкомплексов (соотв. векторных пространств, соотв. топологических пространств)

$$F_0C \subseteq F_1C \subseteq \cdots \subseteq F_pC \subseteq \cdots \subseteq C$$

такая что $C = \lim_{\to p} F_pC$. Условие, что F_pC есть дифференциальный подкомплекс в C означает, что $\partial(F_pC) \subseteq F_p(C)$.

Фильтрация на (C_*, ∂) индуцирует фильтрацию на гомологиях:

$$F_pH_i(C) = \operatorname{Im}(H_i(F_pC) \to H_i(C)) \subset H_i(C)$$

Определение 9.2. Ассоциированным градуированным модулем (также называется присоединенным модулем) для фильтрации F_*C называется модуль

$$\operatorname{Gr} C = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{Gr}_p C, \qquad \operatorname{Gr}_p C = F_pC/F_{p-1}C$$

Определение 9.3. Гомологическая спектральная последовательность — это следующая совокупность данных

- Модули $E^r_{p,q}$, заданные при $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 0$ (либо $r \geqslant r_0$). При фиксированном r группы $E^r_{p,q}$ называются r-м членом (или листом, или страницей) спектральной последовательности

- Гомоморфизмы $d_r\colon E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, удовлетворяющие $d_r^2 = 0$. Эти гомоморфизмы называются дифференциалами спектральной последовательности.

Эти данные удовлетворяют условию

$$E^{r+1}_{p,q} = H_*(E^r_{p,q}, d_r) = \frac{\operatorname{Ker} d_r\colon E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}}{\operatorname{Im} d_r\colon E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q}}.$$

Говорят, что спектральная последовательность сходится, если $\forall p, q$ и $\forall r > r_0 = r_0(p, q)$ выполнено $d_r|_{E^r_{p,q}, E^r_{p+r,q-r+1}} = 0$. В этом случае, начиная с члена r_0 переход к гомологиям на позиции (p, q) ничего не меняет и мы имеем

$$E^{r_0}_{p,q} \cong E^{r_0+1}_{p,q} \cong E^{r_0+2}_{p,q} \cong \cdots \overset{\text{def}}{=} E^\infty_{p,q}$$

Говорят, что спектральная последовательность вырождается в члене E^{r_0}, если $d_r = 0$ при $r \geqslant r_0$. В этом случае, $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$.

Теорема 9.4. *Пусть (F_*C_*, ∂) : фильтрованный дифференциальный комплекс. Тогда существует спектральная последовательность $(E^r_{p,q}, d_r), r \geqslant 0$ такая что*

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(\operatorname{Gr}_p C_*).$$

Если фильтрация F_*C_i ограничена для любого i, то спектральная последовательность сходится к

$$E^\infty_{p,q} = \operatorname{Gr}_p H_{p+q}(C_*)$$

Замечание 9.5. Утверждение теоремы вкратце записывается так

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(\operatorname{Gr}_p C_*) \Rightarrow H_{p+q}(C_*).$$

В подобной записи мы как бы забываем, что предельный член последовательности — это на самом деле не модуль $H_{p+q}(C_*)$, а его присоединенный модуль относительно некоторой фильтрации. Однако такая краткая запись хорошо передает суть решаемой задачи: стартовать с гомологий последовательных фактор-комплексов и прийти к гомологиям большого комплекса.

Доказательство. Фактически, мы это уже доказали. Положим

$$E^r_{p,q} = \frac{\{a \in F_pC_{p+q} \mid \partial a \in F_{p-r}C\}}{F_{p-1}C + \partial F_{p-1+r}C}.$$

Тогда все дифференциалы d_r корректно индуцированы дифференциалом ∂, и каждый следующий лист равен гомологиям предыдущего (упр: проверить требуемые свойства). $\square$

Замечание 9.6. Если речь идет о модулях над полем, т.е. о векторных пространствах, то переход от фильтрации к присоединенному модулю не теряет информации. Если F_*H : фильтрация векторного пространства, то $\operatorname{Gr} H \cong H$.

Над $\mathbb{Z}$ это уже не так. Например, для фильтрации $\mathbb{Z} \overset{\times 2}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}$ имеем $\operatorname{Gr} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}_2 \neq \mathbb{Z}$.

Следствие 9.7. *Для фильтрации топологического пространства*

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots \subseteq X$$

имеется гомологическая спектральная последовательность такая что

$$E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

В случае коэффициентов в поле имеем $H_j(X) \cong \bigoplus_{p+q=j} E^\infty_{p,q}$.

Пример 9.8. Для двучленной фильтрации $Y \subset X$ спектральная последовательность превращается в длинную точную последовательность пары (упр.: проверить)

Спектральная последовательность Майера–Вьеториса Пока мы построили спектральное обобщение точной последовательности гомологий пары. Имеется также спектральное обобщение точной последовательности Майера–Вьеториса.

Пусть пространство X покрыто множествами U_i, $i = 1, \ldots, m$: $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Нервом покрытия называется следующий симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$:

$$K = \left\{ I \subseteq [m] \mid \bigcap\nolimits_{i \in I} U_i \neq \varnothing \right\}$$

(симплексы натянуты на те вершины, для которых соответствующие элементы покрытия пересекаются). Тогда имеется спектральная последовательность Майера–Вьеториса:

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\{i_1, \ldots, i_{p+1}\} \in K} H_q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

Эта спектральная последовательность позволяет (в некотором смысле, конечно) из гомологий всевозможных пересечений U_i собрать гомологии их объединения. Это такой гомологический аналог формулы включения-исключения.

Дифференциалы d_1, действующие на первой странице, явно описываются:

$$d_1 = \bigoplus \pm i_* \colon \bigoplus H_q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}) \to H_q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}),$$

где i_* : гомоморфизмы гомологий, индуцированные включениями подмножеств, а знак $\pm$ определяется так же, как и при определении симплициальных гомологий для комплекса K.

Замечание 9.9. С.п. Майера–Вьеториса можно вывести из с.п. фильтрации, только фильтровать нужно не само пространство X, а гомотопический копредел его покрытия. Мы этого делать не будем.

Пример 9.10. Приведем одно приложение с.п. Майера–Вьеториса. Вначале, в качестве мотивации одно важное утверждение из гомотопической теории

Предложение 9.11 (Нерв-лемма). *Допустим, в покрытии X всевозможные непустые пересечения элементов покрытия стягиваемы*[13]*. Тогда пространство X гомотопически эквивалентно нерву покрытия K.*

Имеется естественный гомологический аналог этого утверждения.

Предложение 9.12 (Гомологическая нерв-лемма). *Допустим, в покрытии X всевозможные непустые пересечения элементов покрытия гомологичны точке. Тогда пространство X имеет те же гомологии, что и нерв покрытия K.*

Доказательство. Пусть все гомологии имеют коэффициенты R. В первом члене с.п. Майера–Вьеториса имеем $E^1_{p,q} = \bigoplus_{\{i_1,\ldots,i_{p+1}\}\in K} H_q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}) = 0$, если $q \neq 0$. Таким образом, все старшие дифференциалы $d_2, d_3, \ldots$ равны нулю по размерностным соображениям (они либо бьют из нуля, либо бьют в нуль, либо и то и другое). Поэтому с.п. вырождается в члене E^2.

Заметим теперь, что $E^1_{p,0} = \bigoplus_{\{i_1,\ldots,i_{p+1}\}\in K} H_0(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}) = \bigoplus_{\{i_1,\ldots,i_{p+1}\}\in K} R$, что совпадает с модулем p-х симплициальных цепей симплициального комплекса K:

$$E^1_{p,0} \cong \mathcal{C}_p(K)$$

Дифференциал d_1 совпадает с симплициальным дифференциалом ∂. Значит $E^2_{p,0} \cong H_p(K)$. Имеем:

$$E^2_{p,0} \cong H_p(K), \qquad E^2_{p,q} = 0 \text{ при } q \neq 0.$$

Значит $H_p(X) = E^\infty_{p,0} = E^2_{p,0} \cong H_p(K)$. □

9.2 Спектральная последовательность Серра

Гомологии расслоений Пусть $X \xrightarrow{p} B$ локально тривиальное расслоение со слоем F и односвязной базой (либо, более общо, $\pi_1(B)$ действует тривиально на $H^*(F)$). Пусть B : CW-комплекс с клеточной фильтрацией (т.е. фильтрацией остовами)

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B, \qquad B = \lim_{\to i} B_i$$

Рассмотрим прообраз этой фильтрации в X:

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X, \qquad X_i = p^{-1}(B_i) \tag{9.9}$$

Далее будем пренебрегать кручением в гомологиях (либо считаем, что коэффициенты в поле, либо, что кручения нет). Спектральная последовательность в гомологиях, ассоциированная с фильтрацией (9.9), имеет вид

$$E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

[13] Требуются также какие-то технические условия на покрытие. Если же X клеточный комплекс, а все U_i : клеточные подкомплексы, то лемма точно работает

Имеем

$$H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \cong \widetilde{H}_{p+q}(X_p/X_{p-1}) \cong \bigoplus_{\sigma\in B, \dim\sigma=p} H_{p+q}(\sigma\times F, \partial\sigma\times F) \cong$$
$$\cong \bigoplus_{\sigma\in B, \dim\sigma=p} H_q(F) \cong \mathcal{C}_p^{CW}(B, H_q(F)).$$

То есть первая страница — это клеточные цепи базы с коэффициентами в гомологиях слоев. Можно проверить, что дифференциал $d_1 = \delta\colon H_{p+q+1}(X_{p+1}, X_p) \to H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ совпадает с клеточным дифференциалом $\mathcal{C}_p^{CW}(B, H_q(F)) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{p-1}^{CW}(B, H_q(F))$. Поэтому,

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B, H_q(F)).$$

Поскольку B односвязно, группы гомологий слоя, висящие над различными клетками, можно отождествить. По теореме об универсальных коэффициентах, их можно вынести за скобки:

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B, H_q(F)) \cong H_p(B)\otimes H_q(F).$$

Таким образом, спектральная последовательность Серра для расслоения X с базой B и слоем F имеет вид

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B)\otimes H_q(F) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Следствие 9.13. *Для расслоения X с базой B и слоем F выполнено $\beta_j(X) \leqslant \beta_j(B\times F)$.*

Когомологические спектральные последовательности — то же, что и гомологические, только дифференциалы бьют в обратную сторону. Когомологическая спектральная последовательность — это набор R-модулей $E_r^{p,q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 0$, и гомоморфизмов $d^r\colon E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$, таких что $E_{r+1}^{p,q} = H^*(E_r^{p,q}, d^r)$.

Предложение 9.14. *Любая убывающая фильтрация градуированных дифференциальных комплексов*

$$(C^*, \delta\colon C^*\to C^{*+1}) \supseteq \cdots \supseteq F^pC^* \supseteq F^{p+1}C^* \supseteq \cdots$$

определяет когомологическую спектральную последовательность $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p\, C^*) \Rightarrow H^{p+q}(C^*)$, если фильтрация ограничена для каждого C^i.

Определение 9.15. Когомологическая спектральная последовательность называется мультипликативной, если на каждом листе задано умножение

$$\star_r\colon E_r^{p,q}\otimes E_r^{p',q'} \to E_r^{p+p',q+q'},$$

относительно которого дифференциал d^r удовлетворяет правилу Лейбница:

$$d^r(\alpha\star_r\beta) = (d^r\alpha)\star_r\beta + (-1)^{p+q}\alpha\star_r(d^r\beta)$$

и $\star_{r+1}$ индуцировано из $\star_r$. Говорят, что мульт.спек.посл. сходится к фильтрованной алгебре H^*, если алгебра $(E_\infty, \star_\infty)$ совпадает с алгеброй $\mathrm{Gr}\, H^*$.

Допустим, на дифференциальном комплексе C^* с убывающей фильтрацией задано умножение $\cdot\colon C^i \otimes C^j \to C^{i+j}$, уважающиее дифференциал:

$$\delta(\alpha \cdot \beta) = \delta(\alpha) \cdot \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cdot \delta(\beta),$$

и фильтрацию

$$F^p C^* \otimes F^{p'} C^* \to F^{p+p'} C^*.$$

Тогда умножение $\cdot$ корректно опускается до умножения $\star = \star_0$ на $\mathrm{Gr}^* C^* = E_0^{*,*}$:

$$\star_0\colon \frac{F^p C^*}{F^{p+1} C^*} \otimes \frac{F^{p'} C^*}{F^{p'+1} C^*} \to \frac{F^{p+p'} C^*}{F^{p+p'+1} C^*}$$

Эта операция индуцирует все последующие операции $\star_r$ в спектральной последовательности для фильтрованного комплекса, причем $\star_\infty\colon \mathrm{Gr}^p H^i \otimes \mathrm{Gr}^{p'} H^j \to \mathrm{Gr}^{p+p'} H^{i+j}$ индуцируется из умножения $\star\colon F^p H^i \otimes F^{p'} H^j \to F^{p+p'} H^{i+j}$. Значит,

Предложение 9.16. *Если на фильтрованном дифференциальном комплексе $F^* C^*$ задано умножение, согласованное с дифференциалом и фильтрацией, то спектральная последовательность из предложения 9.14 мультипликативна и сходится к алгебре гомологий $H(C^*)$.*

Когомологии расслоений Пусть, как и ранее $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$ возрастающая фильтрация топологического пространства. Применение контравариантного функтора сингулярных коцепей $C^*(\cdot) = \mathrm{Hom}_R(C_*(\cdot), R)$ дает

$$C^*(X_0) \twoheadleftarrow C^*(X_1) \twoheadleftarrow \cdots \twoheadleftarrow C^*(X)$$

Чтобы получить из этого агрегата убывающую фильтрацию дифференциальных комплексов на $C^*(X)$, надо рассмотреть ядра этих эпиморфизмов [14]. Положим $F^p C^*(X) = \mathrm{Ann}(F_{p-1} C_*(X)) \subseteq C^*(X)$. Применение предложения 9.14 к этой фильтрации дает

Предложение 9.17. *Имеется когомологическая спектральная последовательность $E_1^{p,q} = H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H^{p+q}(X)$.*

Заметим, что, вообще говоря, эта последовательность не мультипликативна: ниоткуда не следует, что $\cup$-произведение коцепей уважает фильтрацию. Однако, когомологический аналог спектральной последовательности Серра можно сделать мультипликативным (это содержательное утверждение, но мы его не доказываем)

Теорема 9.18. *Пусть $X \xrightarrow{F} B$ локально тривиальное расслоение (или, более общо, расслоение Серра) с односвязной базой (либо тривиальным действием $\pi_1(B)$ на $H^*(F)$). Тогда имеется мультипликативная когомологическая спектральная последовательность Серра*

$$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F) \Rightarrow H^{p+q}(X).$$

[14] В случае функтора $C_*(\cdot)$, фильтрация получалась сразу. В когомологическом случае нужен дополнительный шаг. Это несколько усложняет восприятие

Список литературы

[1] G.E.Bredon, *Topology and geometry.*

[2] S.S.Chern, F.Hirzebruch, H.-P.Serre, *On the index of a fibered manifold*, Proceedings of the American Mathematical Society, V. 8, N.3 (1957), pp. 587-596.

[3] J.Munkres, *Elements of algebraic topology.*

[4] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии.*

[5] А.Хатчер, *Алгебраическая топология.*

[6] М.Хирш, *Дифференциальная топология.*

[7] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия.*

[8] Дж.Милнор, Дж.Сташеф, *Характеристические классы.*

[9] Р.М.Свитцер, *Алгебраическая топология: гомотопии и гомологии.*

[10] M.Hirzebruch, T.Berger, R.Jung, *Manifolds and modular forms.*