

Топология-3, ЭКЗАМЕН, 21.05.2017.

Задача 1. (2 балла) Пусть X : сферизация касательного расслоения к S^2 , т.е. множество касательных векторов единичной длины. Найти $\pi_3(X)$.

Задача 2. (3 балла) Пусть η : вещественное расслоение ранга n над клеточным комплексом B . Пусть $P\eta$: его проективизация, а $\tilde{w}_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$: образ класса Штифеля–Уитни $w_i(\eta)$ при гомоморфизме когомологий, индуцированном отображением $q: P\eta \rightarrow B$. Докажите, что

$$H^*(P\eta; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(B; \mathbb{Z}_2)[t]/(t^n + \tilde{w}_1 t^{n-1} + \dots + \tilde{w}_n), \quad \deg t = 1.$$

Задача 3. Пусть $X \subset \mathbb{C}P^3$: гладкая комплексная поверхность степени d (= множество нулей однородного многочлена степени d = многообразие, пересекающееся с проективной прямой общего положения по d точкам).

(а, 2 балла) Найти эйлерову характеристику 4-мерного многообразия X .

(б, 2 балла) Найти сигнатуру X .

Задача 4. Род Хирцебруха $\chi_Q: \Omega_*^{\text{SO}} \rightarrow \mathbb{Q}$ задан условием $\chi_Q(\mathbb{C}P^{2k}) = (-1)^k$.

(а, 2 балла) Описать ряд, который задает этот род.

(б, 3 балла) Найти значение χ_Q на многообразии F_n полных комплексных флагов в \mathbb{C}^n .

Задача 5. (6 баллов) Докажите, что не существует гладкого замкнутого 12-мерного многообразия M , у которого $\beta_0(M) = \beta_{12}(M) = 1$, $\beta_6(M)$ нечетное, а все остальные числа Бетти нулевые.