Независимый Московский Университет, Алгебраические кривые, весна 2017

7

В этом листке слово *кривая* означает *неприводимая гладкая полная кривая* над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$.

7.0. Докажите, что любая кривая рода 0 рациональна.

7.1. Докажите, что любая кривая рода 1 изоморфна гладкой плоской кубике, а также пространственной квартике.

7.2. Докажите, что любая кривая рода 2 гиперэллиптична и обладает аффинной моделью $v^2 = F \in \mathbb{k}[u]_6$, где F не имеет кратных корней.

7.3. Докажите, что любая кривая рода 3 либо обладает аффинной моделью $v^2 = F \in \mathbb{k}[u]_8$, где F не имеет кратных корней, либо изоморфна гладкой плоской квартике.

7.4. Докажите, что любая кривая рода 4 либо обладает аффинной моделью $v^2 = F \in \mathbb{k}[u]_{10}$, где F не имеет кратных корней, либо изоморфна гладкой пространственной секстике.

7.5*. Докажите, что любая кривая рода 5 либо обладает аффинной моделью $v^2 = F \in \mathbb{k}[u]_{12}$, где F не имеет кратных корней, либо изоморфна пересечению трёх квадрик в $\mathbf{P}_4(\mathbb{k})$.

7.6. Докажите (например, индукцией по d) формулу для рода кривой, заданной в $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$ уравнением $\ell_1 \dots \ell_d = \varepsilon \ell_0^d$, где $\ell_0, \ell_1, \dots \ell_d$ – *общие* линейные формы на $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$, а $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ – достаточно малое положительное число. Допускается неформальное решение.

7.7. Пусть $\mathbf{X}$ – кривая рода g, фиксированы *разные* точки $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{X}$, где $n > g$, и в каждой точке P_i выбран локальный параметр $z_i \in \mathfrak{m}_{P_i}$. *Аддитивная проблема Кузена* основана на задании в каждой P_i *главной части* $f_i = \sum_{j=-m_i}^{-1} a_{i,j} z_i^{-j}$, и требуется найти такую рациональную функцию $f \in \mathbb{k}(\mathbf{X})$, что $f - f_i \in \mathcal{O}_{P_i}$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Докажите, что g заданных главных частей можно изменить так, чтобы аддитивная проблема Кузена была разрешима. **Указание.** Воспользуйтесь точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{O}} \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{K}$ – (постоянный) пучок рациональных функций.

27 апреля, *Г.Б. Шабат*