

Гиперболическая геометрия.

Терминология. Зафиксируем в \mathbb{R}^{n+1} скалярное произведение Лоренца $(x, y)_{\mathbb{L}} = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Квадрика $I = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x, x)_{\mathbb{L}} = 0\} \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ называется *абсолютом*. Множество $\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{P}_n \mid (x, x)_{\mathbb{L}} > 0\}$ с таким расстоянием $|a, b|_{\mathbb{L}} = |(a, b)_{\mathbb{L}}| / \sqrt{(a, a)_{\mathbb{L}}(b, b)_{\mathbb{L}}}$, называется *n-мерным пространством Лобачевского* или *гиперболическим пространством*. Проективные автоморфизмы \mathbb{P}_n , вызванные изометриями формы Лоренца, называются *движениями*. Проективные прямые $\ell \subset \mathbb{P}_n$ называются *геодезическими*. Полярное к точке p векторное пространство $T_p \mathbb{L}^n \stackrel{\text{def}}{=} p^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (p, v) = 0\}$ называется *касательным пространством* к \mathbb{L}^n в точке $p \in \mathbb{L}^n$. На $T_p \mathbb{L}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть евклидово скалярное произведение $(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} -(v, w)_{\mathbb{L}}$. Длины касательных векторов и углы между ними всегда вычисляются в этой евклидовой структуре.

Г16♦1. Покажите, что $|a, b|_{\mathbb{L}} = \left| \frac{1}{2} \ln[a, b, c, d] \right|$, где $c, d \in I$ суть точки пересечения прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_n$ с абсолютом (ср. с Зад. Г13♦3 и Г15♦1).

Г16♦2. Убедитесь, что для каждой точки $p \in \mathbb{L}^n$ скалярное произведение $(v, w) = -(v, w)_{\mathbb{L}}$ на векторном пространстве $T_p \mathbb{L}^n = p^{\perp}$ и впрямь евклидово, а каждая геодезическая $\ell \ni p$ имеет вид $\ell_{p,v} = \{p + tv \in \mathbb{P}_n \mid t \in \mathbb{R}\}$ для некоторого вектора¹ $v \in T_p \mathbb{L}^n$, задаваемого геодезической ℓ однозначно с точностью до пропорциональности.

Г16♦3. Рассмотрим касательные векторы $u, w \in T_a \mathbb{L}^2$ как точки лоренцево полярной к $a \in \mathbb{P}_2$ проективной прямой $\ell = \mathbb{P}(a^{\perp})$ и обозначим через $\{\tau_1, \tau_2\} = \ell \cap I \subset \mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ комплексные точки пересечения прямой ℓ с абсолютом на комплексной плоскости $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$. Покажите, что а) евклидов угол между геодезическими $\ell_{p,u}$ и $\ell_{p,w}$ равен $\frac{1}{2i} \ln[u, w, \tau_1, \tau_2]$ б) перпендикулярность двух пересекающихся геодезических означает их сопряжённость относительно коники I в пучке прямых через точку пересечения в) пучок концентрических гиперболических окружностей с центром в данной точке a это пучок коник, натянутый на I и двойную прямую $\mathbb{P}(a^{\perp})$.

Г16♦4. Пусть при каждом $t \in [0, 1]$ кривая $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, t \mapsto v_t$, имеет $(v_t, v_t)_{\mathbb{L}} = 1$ и определён касательный вектор $\dot{v}_t \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_{t+\Delta t} - v_t) / \Delta t \in \mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, что а) $\dot{v}_t \in T_{v_t} \mathbb{L}^n$ б) если образ кривой в \mathbb{L}^n является отрезком геодезической $[A, B]$, то $\int_0^1 |\dot{v}_t| dt = |AB|_{\mathbb{L}}$.

Г16♦5. Докажите, что \mathbb{L}^n является метрическим пространством. Компактно ли оно?

Г16♦6. Реализуется ли кратчайшее расстояние от точки p до прямой $\ell \not\ni p$ вдоль перпендикуляра, опущенного из p на ℓ , и много ли есть таких перпендикуляров?

Г16♦7. Докажите для любых $n + 2$ точек p_0, p_1, \dots, p_{n+1} n -мерного гиперболического пространства равенство $\det(\text{ch} |p_i, p_j|_h) = 0$. (можно ограничиться $n = 2, 3$)

Г16♦8. Переговорите всю гиперболическую «терминологию» для эллиптических пространств, заменив $(x, y)_{\mathbb{L}}$ формой $(x, y)_e = \sum x_i y_i$ и решите для эллиптического пространства аналоги а) зад. Г16♦1 б) зад. Г16♦2 в) зад. Г16♦3 г) зад. Г16♦4 д) зад. Г16♦5 е) зад. Г16♦6

Г16♦9. Бывают ли отличные от изометрий преобразования \mathbb{L}^n , увеличивающие все расстояния между точками в одно и то же число раз? (Можно ограничиться $n = 2, 3$.)

Г16♦10. Верно ли, что для любых двух точек $a, b \in \mathbb{L}^n$ существует отражение σ_w относительно вектора s $(w, w)_{\mathbb{L}} < 0$, переводящее a в b ? Покажите, что каждое движение пространства \mathbb{L}^n является композицией $\leq (n + 1)$ ортогональных отражений в гиперплоскостях.

Г16♦11. Как действует на \mathbb{L}^n отражение σ_a задаваемое вектором $a \in \mathbb{L}^n$?

Г16♦12. Для углов между (касательными) векторами, отложенными от одной точки гиперболической, эллиптической или евклидовой плоскости, докажите равенство $\sphericalangle(a, b) + \sphericalangle(b, c) = \sphericalangle(a, c)$.

Г16♦13. Для каких $n \geq 3$ на гиперболической плоскости \mathbb{L}^2 существует n -угольник, все углы которого равны π/n , а стороны имеют равную заданную длину? Верно ли, что все такие многоугольники переводятся друг в друга движениями?

Г16♦14. На плоскости Лобачевского \mathbb{L}^2 дан четырёхугольник, у которого три угла прямые, а длины двух из прилежащих к этим углам сторон равны a и b . Найдите четвёртый угол.

¹Он называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* геодезической ℓ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
в			
4а			
б			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			
9			
10			
11			
12			
13			
14			