Сферическая и эллиптическая (проективная сферическая) геометрия

Терминология. Дуги окружностей, высекаемых на сфере $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu^2 = 1\}$ двумерными векторными подпространствами в $\mathbb{R}^{n+1}$ называются *сферическими прямыми*. Минимум длин сферических отрезков[1] $[A, B]$ называется *сферическим расстоянием* между точками $A, B \in S^n$ и обозначается $\varrho_s(A, B)$. Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ с расстоянием $\varrho_e(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\varrho_s(A, B) \mid A \in a \cap S^n,\ B \in b \cap S^n\right)$ называется n-мерным *эллиптическим пространством*. Квадрика $\sum_{\nu=0}^n x_\nu^2 = 0$ в $\mathbb{P}_n^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)$ называется *абсолютом*.

Г15◇1. Покажите, что $\varrho_e(a, b) = \varrho_s(A, B) = \left|\frac{1}{2i}\ln[a, b, c, d]\right|$, где $c, d \in \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ суть (комплексные) точки пересечения прямой $(ab) = (AB) \subset \mathbb{P}_n^{\mathbb{C}}$ с абсолютом (ср. с Зад. Г13◇3.).

Г15◇2. Покажите, что сферические расстояния между $n+2$ точками $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ единичной сферы S^n связаны соотношением $\det\left(\cos\varrho_s(p_i, p_j)\right) = 0$.

Г15◇3. Полярным к сферическому $\triangle ABC \subset S^2$ называется $\triangle A'B'C'$, стороны которого высекаются плоскостями, перпендикулярными векторам A, B, C, и каждая вершина лежит в той же полусфере относительно соответствующей плоскости, что и одноимённая вершина исходного треугольника. Как связаны друг с другом длины сторон и углы полярных треугольников?

Г15◇4. Пусть сферический $\triangle ABC \subset S^2$ имеет стороны a, b, c, углы α, β, γ, полуплощадь[2] s, полупериметр p и полярный треугольник $\triangle A'B'C'$. Докажите соотношения: **а)** $2s = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
б) $\sin a / \sin\alpha = \sin b / \sin\beta = \sin c / \sin\gamma = \det(A, B, C) / \det(A'B'C')$
в) $\det(A, B, C) = \sin b \cdot \sin c \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{\sin p \cdot \sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \cdot \sin(p-c)}$
г) $\det(A', B', C') = \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin a = 2\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-\alpha) \cdot \sin(s-\beta) \cdot \sin(s-\gamma)}$
д) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$ **е)** $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$.

Г15◇5. Покажите, что у каждого треугольника на эллиптической плоскости есть единственная **а)** вписанная **б)** описанная окружность, а их радиусы, соответственно, равны
в) $\operatorname{arctg}\sqrt{\sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \cdot \sin(p-c) / \sin p}$ **г)** $\operatorname{arctg}\sqrt{\sin(\alpha-s) \cdot \sin(\beta-s) \cdot \sin(\gamma-s) / \sin s}$.

Г15◇6. Найдите на эллиптической плоскости площадь фигуры, заметаемой полюсами всех прямых, пересекающих данный отрезок длины a .

Г15◇7. Справедливы ли на эллиптической плоскости признаки равенства треугольников
а) по трём сторнам? **б)** по трём углам?

Г15◇8. Набор точек эллиптической плоскости, в котором все попарные расстояния между точками одинаковы, называется *равносторонним*. Расклассифицируйте с точностью до изометрий все равносторонние наборы из **а)** 3 **б)** 4 **в)** 5 **г)** 6 точек.

Г15◇9. На эллиптической плоскости опишите **а)** ГМТ, равноудалённых от двух данных точек
б) ГМТ, находящихся на фиксированном расстоянии от заданной прямой
в) ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых

Г15◇10. В трёхмерном эллиптическом пространстве заданы прямая ℓ и точка $p \notin \ell$. **а)** Покажите, что $\varrho_e(p, \ell) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left(\varrho_e(p, x) \mid x \in \ell\right)$ достигается для некоторого $x \in \ell$. **б)** Прямая ℓ' называется *метрически параллельной* или *параллельной по Клиффорду* прямой ℓ, если $\varrho_e(y, \ell)$ одинаково для всех $y \in \ell'$. Является ли метрическая параллельность отношением эквивалентности? **в)** Опишите все проходящие через p прямые, метрически параллельные прямой ℓ.

Г15◇11. Покажите, что для любых двух непропорциональных векторов u, w в комплексном векторном пространстве V с положительно определённым эрмитовым скалярным произведением[3] $(*, *) : V \times V \to \mathbb{C}$ величина $\arccos|(u, w)| / \sqrt{(u, u) \cdot (w, w)}$ равна кратчайшему сферическому расстоянию между точками двух непересекающихся окружностей, высекаемых на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C} \cdot u \oplus \mathbb{C} \cdot w$ вещественно двумерными плоскостями $\mathbb{C} \cdot u \simeq \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C} \cdot w \simeq \mathbb{R}^2$.

---

[1] Т. е. величина лежащего в пределах от 0 до π угла между между радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

[2] Напомню, что площадь двумерной единичной полусферы равна 2π ☺.

[3] Т. е. вещественно-билинейной формой, обладающей $\forall\, v, v_1, v_2 \in V$ и $\forall\, z \in \mathbb{C}$ свойствами: $(v_1, v_2) = \overline{(v_2, v_1)}$, $z(v_1, v_2) = (zv_1, v_2) = (v_1, \overline{z}v_2)$, $(v, v) > 0$ при $v \neq 0$.

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
д			
е			
5а			
б			
в			
г			
6			
7а			
б			
8а			
б			
в			
г			
9а			
б			
в			
10а			
б			
в			
11			