Квадрики и билинейные формы размерности > 1 и над незамкнутыми полями

Г14◇1. Из скольких точек состоят над полем[1] $\mathbb{F}_9$ **а)** коника $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ на $\mathbb{P}_2$ **б)** квадрика $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ в $\mathbb{P}_3$?

Г14◇2. Сколько прямых пересекает 4 данные попарно не пересекающиеся прямые в **а)** $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ **б)** $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ **в)** $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ **г)** $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

Г14◇3. Покажите, что касательное пространство к квадрике Сегре

$$S=\{F:U\to U \mid \dim U=2,\ \operatorname{rk}F=1\}\subset\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(\operatorname{End}U)$$

в точке $v\otimes\xi\in S$ образовано всеми такими линейными операторами $F\neq 0$, что $F(\operatorname{Ann}\xi)\subset\Bbbk\cdot v$.

Г14◇4. Покажите, что что пересечение гладкой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p,m) с касательной плоскостью T_xQ является линейным соединением точки x с гладкой квадрикой сигнатуры $(p-1,m-1)$ в дополнительном к x подпространстве в T_xQ.

Г14◇5. Какими могут быть ранг и сигнатура гиперплоского сечения гладкой вещественной проективной квадрики Q сигнатуры (p,m) ? Покажите, что такое сечение особо, если и только если гиперплоскость касается квадрики.

Г14◇6. Для гладкой квадрики $G=V(g)\subset\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$ над полем $\mathbb{C}$ рассмотрим на пространстве Λ^2V билинейную форму $\Lambda^2g(v_1\wedge v_2,\, w_1\wedge w_2)\overset{\text{def}}{=}\det\begin{pmatrix}\widetilde{g}(v_1,w_1) & \widetilde{g}(v_1,w_2)\\ \widetilde{g}(v_2,w_1) & \widetilde{g}(v_2,w_2)\end{pmatrix}$. Запишите её матрицу Грама в таком базисе $e_i\wedge e_j$, что e_i составляют g-ортонормальный базис в V. Проверьте, что

а) форма Λ^2g симметрична и невырождена, а пересечение задаваемой ею квадрики в $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ с *квадрикой Плюккера* $P=\{\omega\in\Lambda^2V \mid \omega\wedge\omega=0\}$ состоит в точности из плюккеровых образов[2] всех прямых, касающихся квадрики G

б*) вложение Плюккера переводит два семейства прямолинейных образующих квадрики G пару коник, высекаемых из квадрики Плюккера двумя дополнительными плоскостями в $\mathbb{P}_5$, состоящими из неподвижных точек *инволюции Ходжа* $*:\mathbb{P}(\Lambda^2V)\to\mathbb{P}(\Lambda^2V)$, $\omega\mapsto\omega^*$, которая однозначно определяется тем, что $\omega_1\wedge\omega_2^*=\Lambda^2g(\omega_1,\omega_2)\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$ для всех $\omega_1,\omega_2\in\Lambda^2V$ и любого g-ортонормального базиса e_1,e_2,e_3,e_4 в V.

Г14◇7. В пространстве $\mathbb{P}_3$ над бесконечным полем заданы 6 точек p_{ij}, занумерованных парами цифр $1\leqslant i<j\leqslant 4$, причём никакие 4 точки не компланарны. Покажите, что 4 плоскости[3] $(p_{12}p_{13}p_{14})$, $(p_{12}p_{23}p_{24})$, $(p_{13}p_{23}p_{34})$, $(p_{14}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке, если и только если 4 плоскости[4] $(p_{12}p_{23}p_{13})$, $(p_{12}p_{24}p_{14})$, $(p_{13}p_{14}p_{34})$, $(p_{23}p_{24}p_{34})$ пересекаются в одной точке.

Г14◇8. Для билинейной формы[5] $\beta:V\times V\to\Bbbk$ **а)** выразите матрицы операторов ${}^\wedge\beta:V\to V^*$, $v\mapsto\beta(v,*)$ и $\beta^\wedge:V\to V^*$, $v\mapsto\beta(*,v)$, в двойственных базисах e и e^* через матрицу Грама базиса e. **б)** Докажите равносильность друг другу следующих свойств ограничения формы β на подпространство $U\subset V$: (1) $\forall$ ненулевого $u\in U$ $\exists\, u'\in U:\beta(u',u)\neq 0$ (2) $\forall$ ненулевого $u\in U$ $\exists\, u''\in U:\beta(u,u'')\neq 0$ (3) $V=U\oplus U^\perp$, где $U^\perp=(w\in V\mid\beta(u,w)=0\ \ \forall u\in U\ \}$ (4) $V={}^\perp U\oplus U$, где ${}^\perp U=(w\in V\mid\beta(w,u)=0\ \ \forall u\in U\ \}$. **в)** Когда эти свойства выполнены, постройте изометрический изоморфизм $U^\perp\simeq{}^\perp U$. **г)** Приведите пример, когда $U^\perp\neq{}^\perp U$ как подпространства в V. Может ли существовать такое дополнительное к $\ker\beta^\wedge$ подпространство $U\subset V$, что ограничение $\beta|_U$ вырождено, для **д)** произвольной **е)** (косо) симметричной билинейной формы β ?

---

[1]Элементы поля $\mathbb{F}_9=\mathbb{Z}[x]/(3x^2+1)$ суть $a+b\sqrt{-1}$, где $a,b\in\mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1\in\mathbb{Z}/(3)$

[2]*Вложение Плюккера* биективно отображает множество всех прямых в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$ на квадрику Плюккера $P\subset\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$, сопоставляя прямой $(ab)\subset\mathbb{P}_3$ одномерное подпространство в Λ^2V, натянутое на бивектор $a\wedge b$.

[3]Натянутые на все такие тройки точек, у которых все пары индексов имеют общую цифру.

[4]Натянутые на все такие тройки точек, у которых все три пары индексов не содержит одну из цифр.

[5]Которая не предполагается ни (косо)симметричной, ни (не)вырожденной.

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 14 (15 марта)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			