Ряды: числовые и степенные

1. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходтися ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2. Докажите интегральный признак сходимости ряда. Пусть $f(x)$ – неотрицательная строго монотонно убывающая на $[1, +\infty)$ функция. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{y\to\infty} \int_1^y f(x)\,dx$.

3. Исследуйте следующие ряды на сходимость: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$, $\delta > 0$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ (при различных α).

4. (а) Существует ли такая последовательность $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, что ряды $\sum a_n$ и $\sum \frac{1}{n^2 a_n}$ сходятся? (б) Можно ли подобрать положительную последовательность $\{a_n\}$?

5. Докажите, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ при $t \to 1 - 0$.

6. Найдите сумму рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n-1}$.

(Указание: можете воспользоваться предыдущей задачей.)

7. Придумайте степенные ряды, области сходимости которых (а) $\{0\}$; (б) $[-R, R]$; (в) $[-R, R)$; (г) $(-R, R)$.

8. С помощью интегрирования рядов для производных найдите разложения Тейлора для обратных тригонометрических функций (а) $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$; (б) $\arcsin x$, $\arccos x$.

9. Найдите суммы рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

10. Найдите суммы числовых рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; (б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

11. Докажите, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

12. Докажите, что следующие три свойства функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ эквивалентны:

(1) $f(x) = O(x)$ при $x \to 0$;

(2) для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ абсолютно сходится;

(3) для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится.